Scheduling Theory and Applications. Part IV

Alexander Lazarev

Lomonosov Moscow State University

National Research University Higher School of Economics

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (ICS RAS)

jobmath@mail.ru

www.orsot.ru

Outline I

1. Resource Constrained Project Scheduling Problem
2. Our publications
3. Open problems
    - Unknown objective function problem
    - Minimizing weighted number of late jobs on a single machine

RCPSP

Resource Constrained Project Scheduling Problem (RCPSP)

Considers resources of limited availability and activities of known durations and resource requests, linked by precedence relations. The problem consists of finding a schedule of minimal duration by assigning a start time to each activity such that the precedence relations and the resource availabilities are respected.

RCPSP

Examples of RCPSP

- Plannig of production and maintenance processes on the enterprise.
- Software development tasks distribution.
- Planning of training processes.

Number of publications in last 5 years

Keyword	GoogleScholar	Science Direct
RCPSP	1 560	161
project scheduling	73 300	63 694

Classical RCPSP formulation

Set of renewable resources R

c_i – capacity of resource $X_i \in R$.

Set of activities $N = \{A_1, \ldots, A_n\}$

$|N| = n$;

$G(N, E)$ – precedence relations graph;

r_j – release time of $A_j \in N$;

p_j – processing time of $A_j \in N$;

a_{ji} – amount of resource $X_i \in R$ required to process $A_j \in N$.

All variables belong to Z_+.

Classical RCPSP formulation

Schedule π

$S_j(\pi)$ – start time of activitiy $A_j \in N$ under π;

$C_j(\pi) = S_j(\pi) + p_j$ – completion time of task $A_j \in N$ under π.

Feasible schedules $\Pi(N, R)$

$S_j(\pi) \geq r_j$ holds for any $A_j \in N, \pi \in \Pi(N, R)$ – release times not violated;

$C_j(\pi) \leq S_k(\pi)$ for any $e_{jk} \in E$ – precedence relations satisfied;

$\sum\limits_{j \in N : S_j(\pi) \leq t < C_j(\pi)} a_{ji} \leq c_i$ for any $X_i \in R,\ t \geq 0$ – resource capacity not violated.

Classical RCPSP formulation

Problem statement

The RCPSP is the problem of finding a feasible schedule of minimal makespan subject to precedence constraints and resource constraints, i.e.

$$\min_{\pi \in \Pi(N,R)} \max_{A_j \in N} C_j(\pi).$$

Complexity

Problem is NP-complete in a strong sense (Garey, Johnson 1975).

Example

Problem data

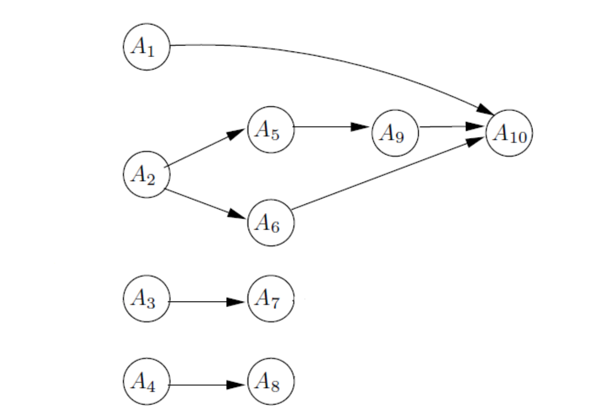
2 resources X_1 and X_2 with capacities $c_1 = 7$ and $c_2 = 4$;

10 activities.

A_j	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
p_j	6	1	1	2	3	5	6	3	2	4
a_{j1}	2	1	3	2	1	2	3	1	1	1
a_{j2}	1	0	1	0	1	1	0	2	2	1

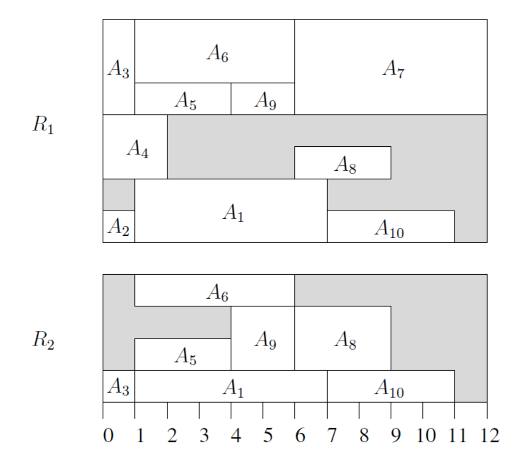
Example

Precedence relations



Example

Schedule with minimal makespan



Decision variant of RCPSP

The decision variant of the RCPSP is the problem of determining whether a schedule π of makespan not greater than H subject to precedence and resource constraints exists or not.

NP-complete in a strong sense

Garey and Johnson (1975) have shown that the decision variant of the RCPSP with a single resource and no precedence constraints, called the resource-constrained scheduling problem, is NP-complete in the strong sense by reduction from the 3-partition problem.

Exact solution methods for RCPSP

There is a variety of methods to find the exact solutions. Most of them are based on the following ideas.

- Branch-and-Bound approach;
- Column Generation;
- Constraint Programming.

Makespan lower bound

Correct makespan lower bound

LB – amount of time which is not higher than makespan value for any schedule $\pi \in \Pi(N, R)$, i.e.

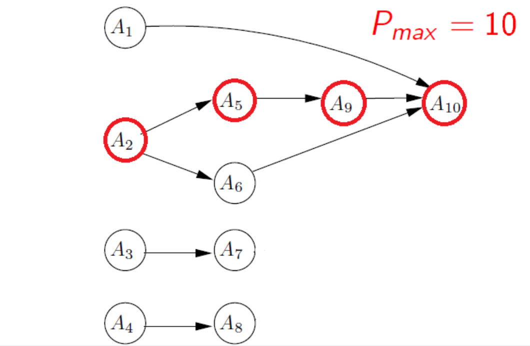
$$LB \leq \max_{A_j \in N} C_j(\pi).$$

Existing lower bound estimation methods

Critical path

P_{max} – length of the longest path in graph $G(N, E)$.
Makespan is not lower than critical path length for any $\pi \in \Pi(N, R)$.

$$P_{\max} = LB_P.$$



Existing lower bound estimation methods

Resource load

$RL_i = \sum_{A_j \in N} p_j a_{ji}$ – total amount of reource X_i required for the project.

Then, under any feasible schedule makespan value should be enough to use requred amount of any resource $X_i \in R$ subject to its capacity, i.e.

$$LB_R = \lceil \max_{i \in R} \frac{RL_i}{c_i} \rceil.$$

In our example

$$\frac{RL_1}{c_1} = \frac{60}{7} = 8\frac{4}{7}, \ \frac{RL_2}{c_2} = \frac{29}{4} = 7\frac{1}{4},$$

$$LB_R = \lceil 8\frac{4}{7} \rceil = 9.$$

Existing lower bound estimation methods

Destructive lower bound techniques

Deals with decision variant of RCPSP. The objective is to prove that for defined horizon H there are no feasible schedule with makespan not higher than H:

- desjunctive lower bounds i.e. maximum clique computation;
- Linear Programming (LP) relaxations;
- relaxations of decision variant of RCPSP to Cumulative Scheduling Problem (CuSP);
- other constraint programming based approaches;
- exact methods of solving decision variant of RCPSP.

Existing lower bound estimation methods

Satisfiability tests (SAT)

1. Find makespan lower bound LB and upper bound UB using algorithms with low computational complexity.
2. Consider time horizon H such as $LB \leq H \leq UB$ and use some of *destructive lower bound* techniques to check the existance of feasible schedule with makespan not lower than H.
3. Use logarithmic search to find the highest horizon H^* which not allows the existance of feasible schedule.
4. Set the lower bound equals to $H^* + 1$.

Existing lower bound estimation methods

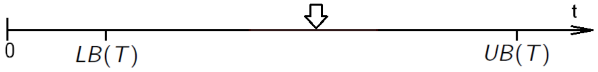
Satisfiability tests (SAT)

1. Find makespan lower bound *LB* and upper bound *UB* using algorithms with low computational complexity.
2. Consider time horizon H such as $LB \leq H \leq UB$ and use some of *destructive lower bound* techniques to check the existance of feasible schedule with makespan not lower than H.
3. Use logarithmic search to find the highest horizon H^* which not allows the existance of feasible schedule.
4. Set the lower bound equals to $H^* + 1$.

Existing lower bound estimation methods

Satisfiability tests (SAT)

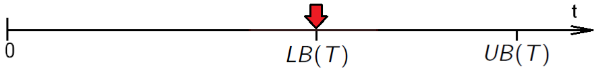
1. Find makespan lower bound LB and upper bound UB using algorithms with low computational complexity.
2. Consider time horizon H such as $LB \leq H \leq UB$ and use some of *destructive lower bound* techniques to check the existance of feasible schedule with makespan not lower than H.
3. Use logarithmic search to find the highest horizon H^* which not allows the existance of feasible schedule.
4. Set the lower bound equals to $H^* + 1$.



Existing lower bound estimation methods

Satisfiability tests (SAT)

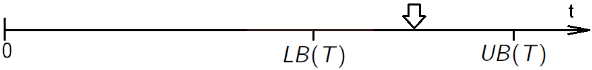
1. Find makespan lower bound LB and upper bound UB using algorithms with low computational complexity.
2. Consider time horizon H such as $LB \leq H \leq UB$ and use some of *destructive lower bound* techniques to check the existance of feasible schedule with makespan not lower than H.
3. Use logarithmic search to find the highest horizon H^* which not allows the existance of feasible schedule.
4. Set the lower bound equals to $H^* + 1$.



Existing lower bound estimation methods

Satisfiability tests (SAT)

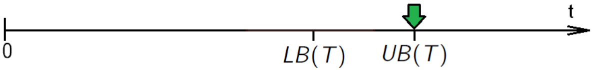
1. Find makespan lower bound LB and upper bound UB using algorithms with low computational complexity.
2. Consider time horizon H such as $LB \leq H \leq UB$ and use some of *destructive lower bound* techniques to check the existance of feasible schedule with makespan not lower than H.
3. Use logarithmic search to find the highest horizon H^* which not allows the existance of feasible schedule.
4. Set the lower bound equals to $H^* + 1$.



Existing lower bound estimation methods

Satisfiability tests (SAT)

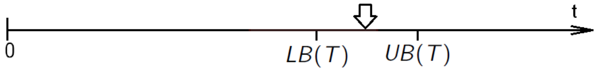
1. Find makespan lower bound *LB* and upper bound *UB* using algorithms with low computational complexity.
2. Consider time horizon H such as $LB \leq H \leq UB$ and use some of *destructive lower bound* techniques to check the existance of feasible schedule with makespan not lower than H.
3. Use logarithmic search to find the highest horizon H^* which not allows the existance of feasible schedule.
4. Set the lower bound equals to $H^* + 1$.



Existing lower bound estimation methods

Satisfiability tests (SAT)

1. Find makespan lower bound LB and upper bound UB using algorithms with low computational complexity.
2. Consider time horizon H such as $LB \leq H \leq UB$ and use some of *destructive lower bound* techniques to check the existance of feasible schedule with makespan not lower than H.
3. Use logarithmic search to find the highest horizon H^* which not allows the existance of feasible schedule.
4. Set the lower bound equals to $H^* + 1$.



Existing lower bound estimation methods

Constraint Propagation to tighten the problem

These approaches makes an interval $[r_j, D_j]$ of possible processing of activity $A_j \in N$ tighter and improve the performances of algorithms. The most popular approaches are:

- *timetabling* techniques are based on the computation of an aggregation of the resource demand at every time-point;
- *edge finding* and *activity intervals* techniques rely on the analysis of the resource demand over time intervals;
- *conjunctive reasoning with temporal constraints* are based on an analysis of the current temporal constraint network.

Existed lower bound estmiation methods

Trivial algorithms

Advantages: low calculation complexity, algorithms can be applied for large-scaled problems.
Disadvantages: low precision of obtained bound.

Advanced algorithms

Advantages: high precision of obtained bound.
Disadvantages: exponential complexity decrease the efficiency of obtained bound and make algorithms not possible to be applied for some large-scaled problems.

Problem!

There is a strong need in the method which can obtain suitable lower bound for large-scaled instances!

RCPSP

Some generalizations of RCPSP

- RCPSP with time-dependent resource capacities.
- RCPSP with minimal and maximal time lags (RCPSP/max) – generalized precedence relations express relations of start-to-start, start-to-end, end-to-start, and end-to-end times between pairs of activities.
- Multi-Mode RCPSP (MRCPSP) – activities can be processed in several modes each of which charachterized by processing time and required amounts of resources.
- RCPSP with flexible resource profile (FRCPSP) – only total amounts of required resources are given for activies instead, processing times are not defined.

RCPSP

PSPLIB benchmark

The library of instances of problems RCPSP, RCPSP/max, MRCPSP, MRCPSP/max, FRCPSP and others.
Website: http://www.om-db.wi.tum.de/psplib/main.html

Kolisch, R. and A. Sprecher (1996)

PSPLIB - A project scheduling library // *European Journal of Operational Research*, Vol. 96, pp. 205–216.

R. Kolisch, C. Schwindt und A.Sprecher (1999)

Benchmark instances for project scheduling problems *In: Kluwer; Weglarz, J. (Hrsg.): Handbook on recent advances in project scheduling*, pp. 197-212.

Graphical algoritm

Graphical algorithm

Partition problem

Consider a sorted set of n positive integer numbers $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $b_1 \ge b_2 \ge \dots \ge b_n$. Divide the set B into two subsets B_1, B_2, so that

$$|\sum_{b_i \in B_1} - \sum_{b_i \in B_2}| \to \min$$

Graphical algorithm

Partition problem

Consider a sorted set of n positive integer numbers $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$. Divide the set B into two subsets B_1, B_2, so that

$$\left| \sum_{b_i \in B_1} - \sum_{b_i \in B_2} \right| \to \min$$

One-dimensional Knapsack problem

This problem can be viewed as an integer programming problem:

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max \\ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W \\ x_i \in \{0,\ 1\},\ i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Graphical algorithm

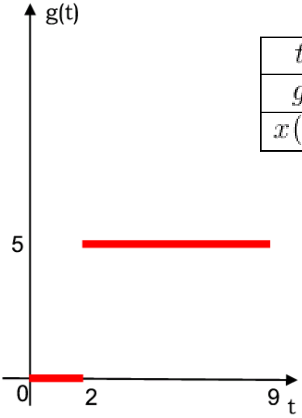
If $c_i = a_i = b_i, i = 1, \ldots, n$ and $W = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} b_i$, then Partition problem and One-dimensional Knapsack problem are equivalent.

$$f(x) = 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 3x_4 \longrightarrow \max$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leq 9$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \ i = 1, \dots, 4.$$

Step 1



t	0	2
g	0	5
$x(t)$	$(0, , ,)$	$(1, , ,)$

t	$g_1(t)$	$x(t)$
0	0	$(0,,,)$
1	0	$(0,,,)$
2	5	$(1,,,)$
3	5	$(1,,,)$
4	5	$(1,,,)$
5	5	$(1,,,)$
6	5	$(1,,,)$
7	5	$(1,,,)$
8	5	$(1,,,)$
9	5	$(1,,,)$

$$f(x) = 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 3x_4 \longrightarrow \max$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leq 9$$

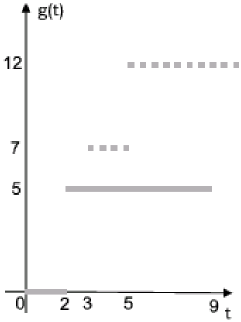
$$x_i \in \{0,1\},\ i = 1,\ldots,4.$$

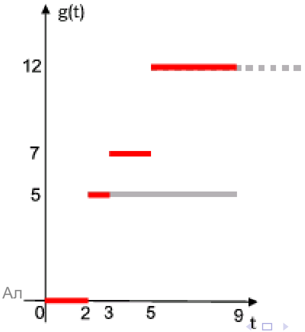
Step 2

t	0	2
g	0	5
$x(t)$	$(0,,,)$	$(1,,,)$

Let's consider 4 points:
0, 2, 0+3, 2+3

t	0	2	3	5
g	0	5	7	12
$x(t)$	$(0,0,,)$	$(1,0,,)$	$(0,1,,)$	$(1,1,,)$





$$f(x) = 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 3x_4 \longrightarrow \max$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leq 9$$

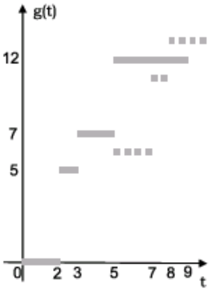
$$x_i \in \{0,1\},\ i = 1, \ldots, 4.$$

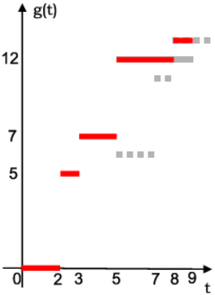
Step 3

t	0	2	3	5
g	0	5	7	12
$x(t)$	$(0,0,,)$	$(1,0,,)$	$(0,1,,)$	$(1,1,,)$

Let's consider 7 points:
0, 2, 3, 5, 0+5, 2+5, 3+5.
Point 5+5 > 9 is not considered

t	0	2	3	5	8
g	0	5	7	12	13
$x(t)$	$(0,0,0,)$	$(1,0,0,)$	$(0,1,0,)$	$(1,1,0,)$	(0,1,1,)





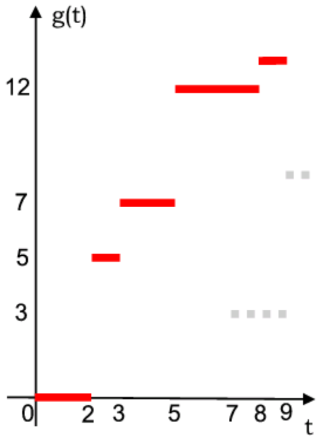
$$f(x) = 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 3x_4 \longrightarrow \max$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leq 9$$

$$x_i \in \{0,1\},\ i = 1, \ldots, 4.$$

Step 4

t	$g_1(t)$	$x(t)$	$g_2(t)$	$x(t)$	$g_3(t)$	$x(t)$	$g_4(t)$	$x(t)$
0	0	(0,,,)	0	(0,0,,)	0	(0,0,0,)	0	(0,0,0,0)
1	0	(0,,,)	0	(0,0,,)	0	(0,0,0,)	0	(0,0,0,0)
2	5	(1,,,)	5	(1,0,,)	5	(1,0,0,)	5	(1,0,0,0)
3	5	(1,,,)	7	(0,1,,)	7	(0,1,0,)	7	(0,1,0,0)
4	5	(1,,,)	7	(0,1,,)	7	(0,1,0,)	7	(0,1,0,0)
5	5	(1,,,)	12	(1,1,,)	12	(1,1,0,)	12	(1,1,0,0)
6	5	(1,,,)	12	(1,1,,)	12	(1,1,0,)	12	(1,1,0,0)
7	5	(1,,,)	12	(1,1,,)	12	(1,1,0,)	12	(1,1,0,0)
8	5	(1,,,)	12	(1,1,,)	13	(0,1,1,)	13	(0,1,1,0)
9	5	(1,,,)	12	(1,1,,)	13	(0,1,1,)	13	(0,1,1,0)

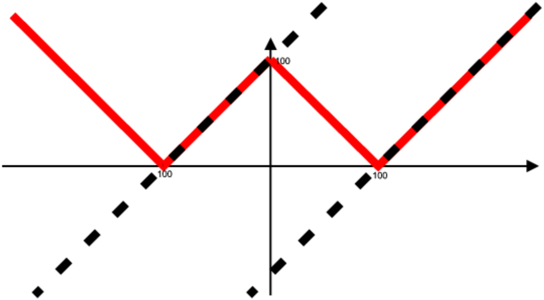


t	0	2	3	5	8
g	0	5	7	12	13
$x(t)$	(0, 0, 0, 0)	(1, 0, 0, 0)	(0, 1, 0, 0)	(1, 1, 0, 0)	(0,1,1,0)

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \ldots \geq \frac{c_n}{a_n}.$$

$B = \{100, 70, 50, 20\}$

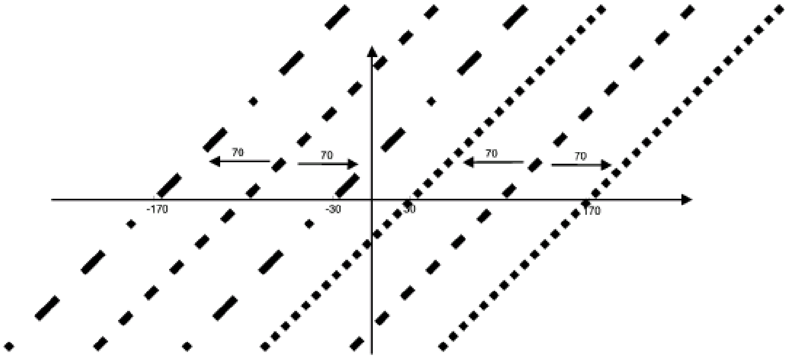
Step 1



-100	100
$(100;)$	$(;100)$

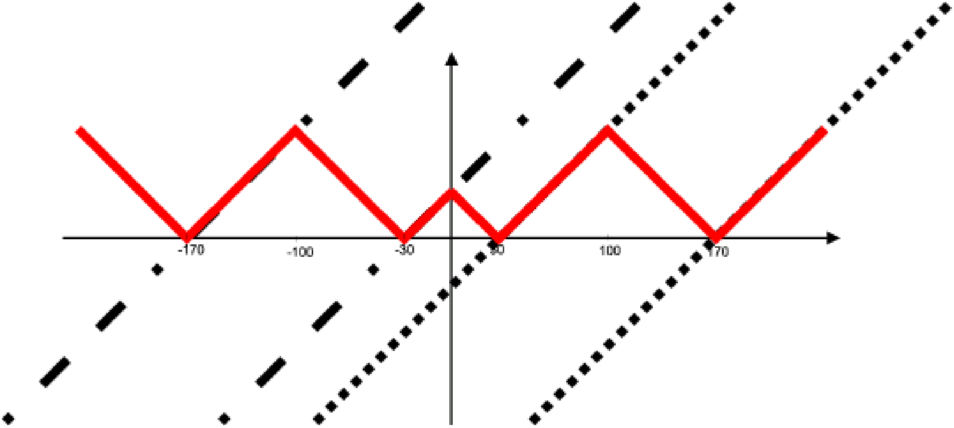
$B = \{100, 70, 50, 20\}$

Step 2



$B = \{100, 70, 50, 20\}$

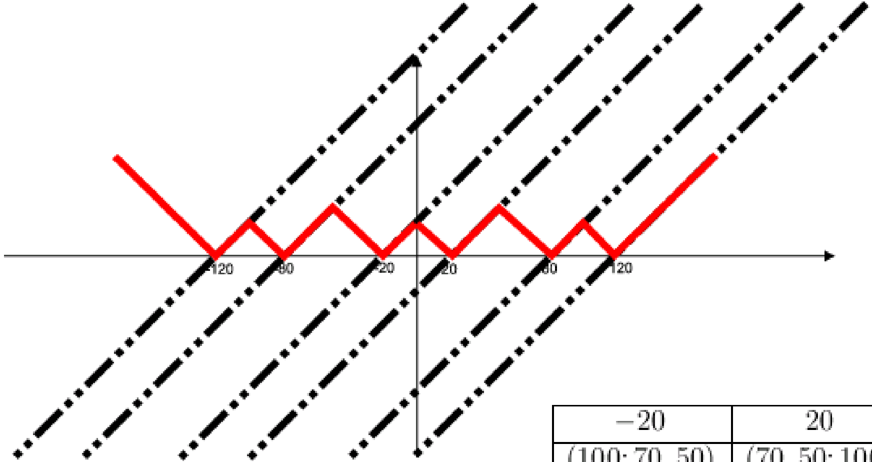
Step 2



-30	30
$(100; 70)$	$(70; 100)$

$B = \{100, 70, 50, 20\}$

Step 3



-20	20
$(100; 70, 50)$	$(70, 50; 100)$

$$40 \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n. \quad n = 4, 5, \ldots, 10.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	123 410	9	307	328	20	443	640	2	63 684
5	1 086 008	16	444	512	40	564	1000	2	337 077
6	8 145 060	29	542	738	60	687	1440	4	1 140 166
7	53 524 680	48	633	1004	140	811	1960	11	2 799 418
8	314 457 495	76	725	1312	212	933	2560	23	5 348 746
9	1 677 106 640	115	814	1660	376	1053	3240	83	8 488 253
10	8 217 822 536	168	905	2050	500	1172	4000	416	11 426 171

1st column: dimensionality of the problem (*n*);
2nd column: total number of solved instances for given *n* ($C_n^{b_{max}+n-1}$, where $b_{max} = 40$);
3rd column: average value of computational complexity of graphic algorithm;
4th column: average value of computational complexity of Balsub algorithm;
5th column: average value of computational complexity of dynamic programming algorithm;
6th column: maximal value of computational complexity of graphic algorithm;
7th column: maximal value of computational complexity of Balsub algorithm;
8th column: maximal value of computational complexity of dynamic programming algorithm;
9th column: amount of instances for which complexity of Balsub algorithm is less than the complexity of graphic algorithm;
10th column: amount of instances for which complexity of dynamic programming algorithm is less than complexity of Balsub algorithm.

Keller H., Pferschy U., Pisinger D. Knapsack problems. Springer, 2004.

Graphical algorithm approach

Project investment problem

n potential projects

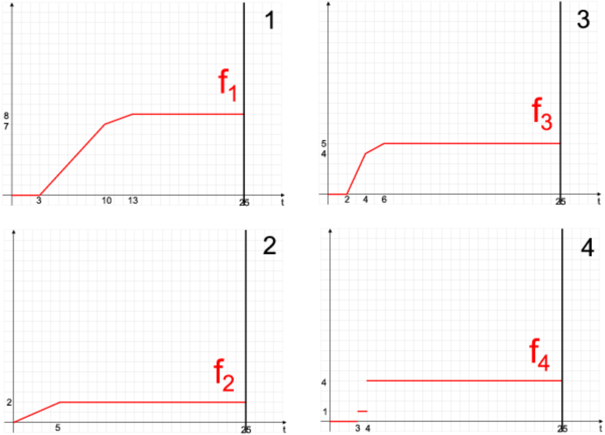
A – an investment budget (for all A from interval $[A',A'']$)

$f_j(t)$ -- a profit function of project j

The goal is to define an amount t_j in $[0,A]$ (integer) for each project to maximize the total profit.

$\sum t_j <= A$

Project investment problem



Graphical algorithm for the project investment problem

Dynamic programming algorithm $O(nA^2)$. Or $O(\sum k_j A)$

$$F_j(T) = \max_{t=0,1,\ldots,T}\{f_j(t) + F_{j-1}(T-t)\},\ T = A, A-1, \ldots, 1,$$

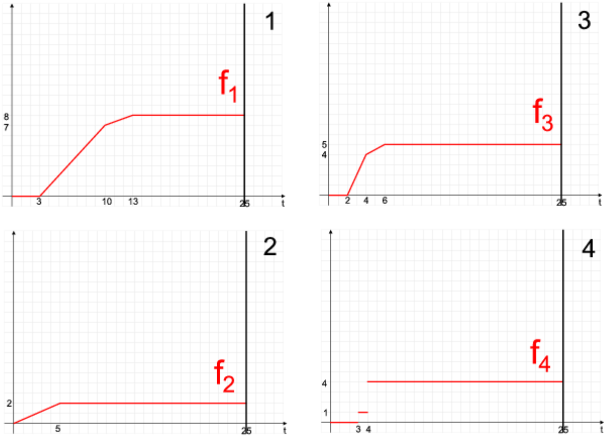
In Graphical Algorithm functions $f_j(t)$ and Bellman's functions (value function) $F_j(t)$ are saved in tabular form:

K	1	2	$\ldots$	k_j
interval K	$[t_j^1, t_j^2)$	$[t_j^2, t_j^3)$	$\ldots$	$[t_j^{k_j}, A)$
b_j^K	b_j^1	b_j^2	$\ldots$	$b_j^{k_j}$
u_j^K	u_j^1	u_j^2	$\ldots$	$u_j^{k_j}$

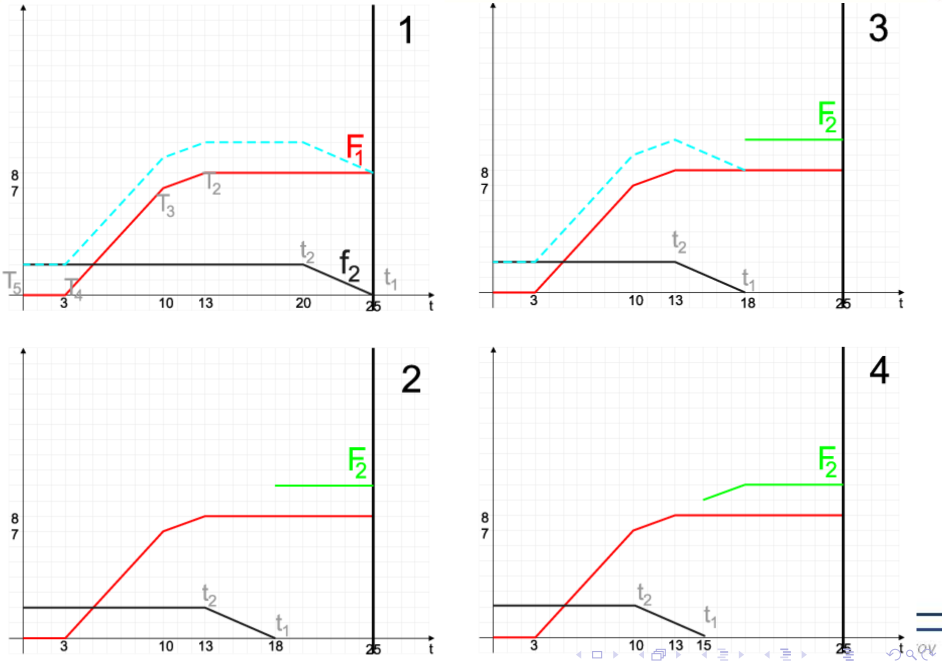
Running time for the 1st version of Graphical Algorithm $O(nk_{max}A\log(k_{max}A))$

Running time for the 2nd version of Graphical Algorithm $O(\sum k_j A)$

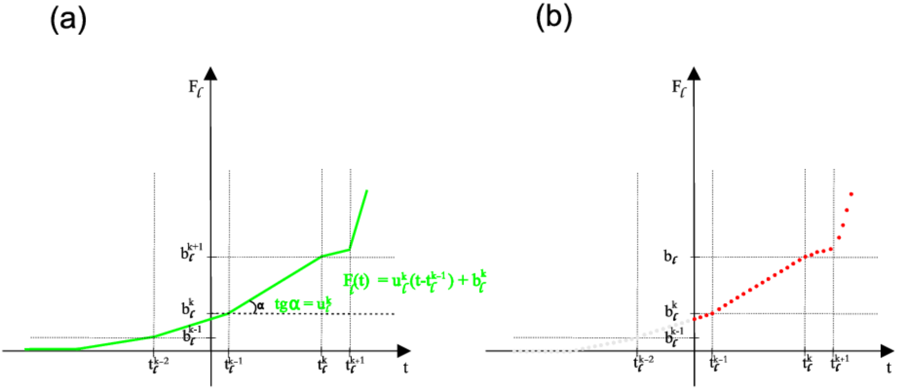
Graphical algorithm for Investments problem



K	1	2	3	4
interval K	$[0, 3)$	$[3, 10)$	$[10, 13)$	$[13, 25]$
b_1^K	0	0	7	8
u_1^K	0	1	$\frac{1}{3}$	0


1
F1
8
7
T2
T3
t2
f2
t1
T5
T4
3
10
13
20
25
t
3
F2
8
7
t2
t1
3
10
13
18
25
t
2
F2
8
7
t2
t1
3
10
13
18
25
t
4
F2
8
7
t2
t1
3
10
13
15
25
t

FPTAS for 6 scheduling problems



FPTAS for 6 scheduling problems

Problem	Time complexity of the GrA	Time complexity of the FPTAS	Time complexity of the classical DPA
$1\|\|\sum w_jU_j$	$O(\min\{2^n, n\cdot\min\{d_{max}, F_{opt}\}\})$ [5]	-	$O(nd_{max})$
$1\|d_j = d'_j + A\|\sum U_j$	$O(n^2)$ [5] (GrA)	-	$O(n\sum p_j)$
$1\|\|\sum GT_j$	$O(\min\{2^n, n\cdot\{d_{max}, nF^*\}\})$	$O(n^2\log\log n + \frac{n^2}{\varepsilon})$	$O(nd_{max})$
$1\|\|\sum T_j$ special case $B-1$	$O(\min\{2^n, n\cdot\min\{d_{max}, F^*\}\})$	$O(n^2/\varepsilon)$	$O(nd_{max})$
$1\|\|\sum T_j$ special case $B-1G$	$O(\min\{n^2\cdot\min\{d_{max}, F^*\}\})$	$O(n^3/\varepsilon)$	$O(n^2d_{max})$
$1\|d_j = d\|\sum w_jT_j$	$O(\min\{n^2\cdot\min\{d, F^*\}\})$	$O(n^3/\varepsilon)$	$O(n^2d_{max})$
$1(no\text{-}idle)\|\|\max\sum w_jT_j$	$O(\min\{2^n, n\cdot\min\{d_{max}, nF^*, \sum w_j\}\})$ [5]	$O(n^2\log\log n + \frac{n^2}{\varepsilon})$	$O(nd_{max})$
$1(no\text{-}idle)\|\|\max\sum T_j$	$O(n^2)$ [4] (GrA)	-	$O(nd_{max})$

Dynamic Programming Algorithms for the Problem $1|d_j=d|\sum w_j T_j$

Single machine

n jobs $j = 1,2,\ldots,n$

p_j processing time $d_j=d$ common due date

w_j weight

Tardiness of job j in schedule π : $T_j(\pi) = \max\{0, C_j(\pi)-d\}$

Goal: Find a schedule π^* that minimizes $\sum w_j T_j$

Dynamic Programming Algorithms for the Problem $1|d_j\!=\!d|\sum w_jT_j$

Lemma 1: There exists an optimal schedule

$\pi = (G,x,H)$, where

all jobs from set G *are on-time* and processed in non-increasing order of the values p_j/w_j ;

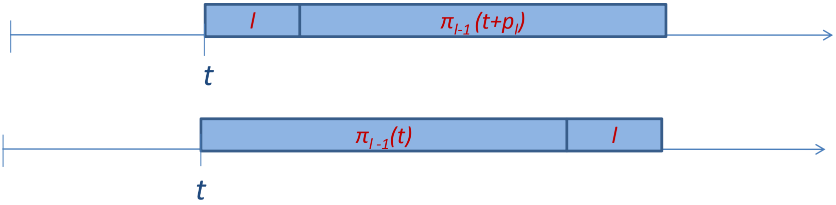
all jobs from set H are tardy and processed in non-decreasing order of the values p_j/w_j ;

the straddling job x starts before time d and is completed no earlier than time d.

First Dynamic Programming Algorithm for the Problem $1|d_j=d|\sum w_jT_j$

Let $x=1$ be the straddling job.

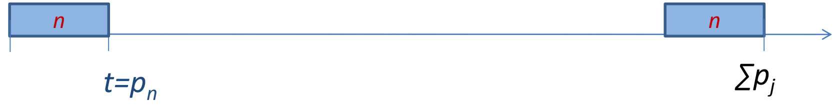
In step l, $l = 1,2,\dots, n$ for each state $t=[0, \sum p_j]$ or $[0,d]$ we choose one of two positions for job l:



The running time is $O(nd)$ for each straddling job $x=1,2,\dots,n$

The Second Dynamic Programming Algorithm for the Problem $1|d_j=d|\sum w_jT_j$

Let $x=1$ be the straddling job.



t is the total processing time of the jobs scheduled at the beginning of a schedule.
In step $l=n$, two states are saved: (p_n,F_1) and (p_n,F_2)

4 states are saved in step $l=n-1$

Comparison of Dynamic Programming Algorithms

In the first algorithm, all integer points (states) *t = [0,d]* are considered.
The running time is *O(nd)*.

In the second algorithm, only possible points *t = [0,d]* are considered, which are computed if the processing of the jobs starts at time 0.
The running time is *O(nd)* as well.

The second algorithm is faster (since it considers not all points *t*),
but **the first algorithm finds an optimal solution for each integer starting time from *[0,d]*.**

Graphical Algorithm

Dynamic Programming (Bellman 1954)

Functional equations:
consider in each step j all states $t \in [0, A] \cap Z$

$$f_j(t) = \min \begin{cases} \Phi^1(t) = \alpha_j(t) + f_{j-1}(t - a_j), & j = 1, 2, \ldots, n; \\ \Phi^2(t) = \beta_j(t) + f_{j-1}(t - b_j), & j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Idea of the graphical algorithm:
Combine several states into a new state

For $t \in [t_l, t_{l+1})$, we have
$f_j(t) = \varphi_{l+1}(t)$ and an optimal solution $X(t_l)$

Graphical Algorithm

Computations **in the first** dynamic programming algorithm

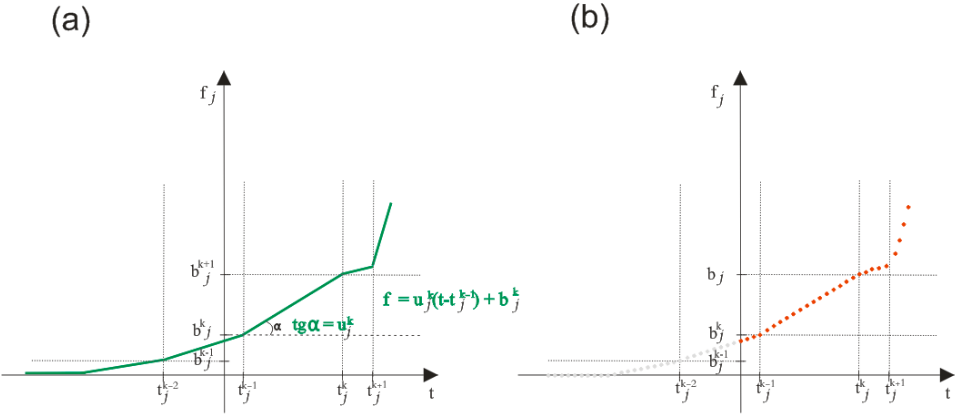
t	0	1	2	$\dots$	y	$\dots$	A
$f_j(t)$	$value_0$	$value_1$	$value_2$	$\dots$	$value_y$	$\dots$	$value_A$
optimal partial solution $X(t)$	$X(0)$	$X(1)$	$X(2)$	$\dots$	$X(y)$	$\dots$	$X(A)$

Computations in the graphical algorithm

t	$[t_0, t_1)$	$[t_1, t_2)$	$\dots$	$[t_l, t_{l+1})$	$\dots$	$[t_{m_j-1}, t_{m_j}]$
$f_j(t)$	$\varphi_1(t)$	$\varphi_2(t)$	$\dots$	$\varphi_{l+1}(t)$	$\dots$	$\varphi_{m_j}(t)$
optimal partial solution $X(t)$	$X(t_0)$	$X(t_1)$	$\dots$	$X(t_l)$	$\dots$	$X(t_{m_j-1})$

For $t \in [t_l, t_{l+1})$, we have
$f_j(t) = \varphi_{l+1}(t)$ and an optimal solution $X(t_l)$

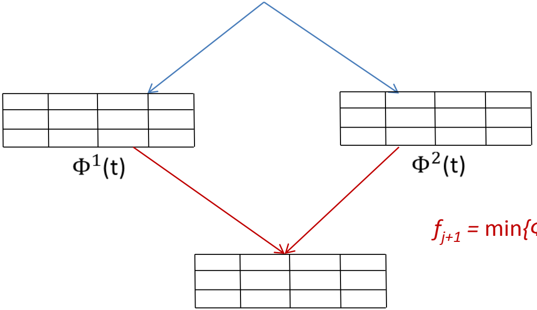
Graphical Algorithm



k	1	2	$\dots$	m_j+1	m_j+2
interval k	$(-\infty, t_j^1]$	$(t_j^1, t_j^2]$	$\dots$	$(t_j^{m_j}, t_j^{m_j+1}]$	$(t_j^{m_j+1}, +\infty)$
b_j^k	0	b_j^2	$\dots$	$b_j^{m_j+1}$	$+\infty$
u_j^k	0	u_j^2	$\dots$	$u_j^{m_j+1}$	0
π_j^k	π_j^1	π_j^2	$\dots$	$\pi_j^{m_j+1}$	$(1, 2, \dots, j)$

Graphical Algorithm

k	1	2	$\dots$	m_j+1	m_j+2
interval k	$(-\infty, t_j^1]$	$(t_j^1, t_j^2]$	$\dots$	$(t_j^{m_j}, t_j^{m_j+1}]$	$(t_j^{m_j+1}, +\infty)$
b_j^k	0	b_j^2	$\dots$	$b_j^{m_j+1}$	$+\infty$
u_j^k	0	u_j^2	$\dots$	$u_j^{m_j+1}$	0
π_j^k	π_j^1	π_j^2	$\dots$	$\pi_j^{m_j+1}$	$(1,2,\dots,j)$



$f_{j+1} = \min\{\Phi^1, \Phi^2\}$

Graphical Algorithm

k	1	2	$\dots$	m_j+1	m_j+2
interval k	$(-\infty, t_j^1]$	$(t_j^1, t_j^2]$	$\dots$	$(t_j^{m_j}, t_j^{m_j+1}]$	$(t_j^{m_j+1}, +\infty)$
b_j^k	0	b_j^2	$\dots$	$b_j^{m_j+1}$	$+\infty$
u_j^k	0	u_j^2	$\dots$	$u_j^{m_j+1}$	0
π_j^k	π_j^1	π_j^2	$\dots$	$\pi_j^{m_j+1}$	$(1,2,\dots,j)$

In the table, $0<b_l^1<b_l^2<\dots$ since function $F(t)$ is monotonic with t being the starting time.

Function $F_l(t)$ can be defined for all t from $(-\infty,+\infty)$.

Let UB be an upper bound on the optimal objective function value.
Then we have to save only the columns with $b_l^k<UB$.

The running time of the Graphical Algorithm is $O(n \min\{UB,d\})$ for each straddling job x.

FPTAS based on the Graphical Algorithm

k	1	2	$\dots$	m_j+1	m_j+2
interval k	$(-\infty, t_j^1]$	$(t_j^1, t_j^2]$	$\dots$	$(t_j^{m_j}, t_j^{m_j+1}]$	$(t_j^{m_j+1}, +\infty)$
b_j^k	0	b_j^2	$\dots$	$b_j^{m_j+1}$	$+\infty$
u_j^k	0	u_j^2	$\dots$	$u_j^{m_j+1}$	0
π_j^k	π_j^1	π_j^2	$\dots$	$\pi_j^{m_j+1}$	$(1, 2, \dots, j)$

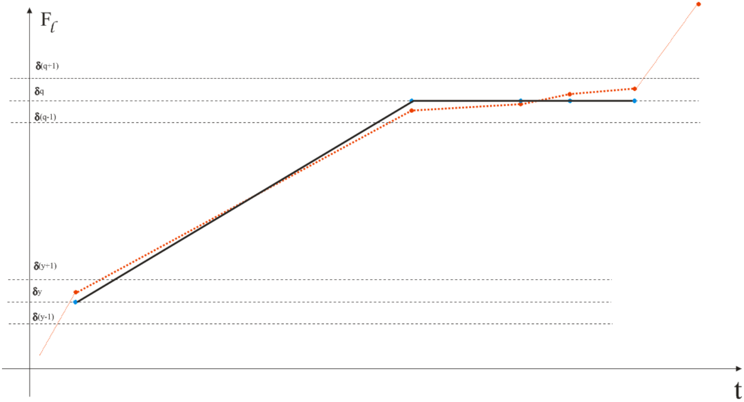
In the table, $0<b_l^1<b_l^2<\ldots$ since function $F(t)$ is monotonic with t being the starting time.

The running time of the Graphical Algorithm is $O(n \min\{UB,d\})$ for each straddling job x.

To reduce the running time, we can round (approximate) the values $b_l^k<UB$ to get a polynomial number of different values b_l^k

Let $\delta = \frac{\varepsilon UB}{2n}$. Round b_l^k up or down to the nearest multiple of δ

FPTAS based on the Graphical Algorithm



no more than $\frac{UB}{\delta} = \frac{2n}{\varepsilon}$ different values $\overline{b_l^k}$

no more than $4\frac{n}{\varepsilon}$ columns

cumulative error will be no more than $n\delta \leq \varepsilon F(\pi^*)$

The running time of the FPTAS is $O(\frac{n^3}{\varepsilon})$

Comparison of Dynamic Programming and Graphical Algorithms

Note	Classical DPA	GrA	Alternative DPA
Can it solve instances with $p_j \notin Z$ and instances with large values p_j	no	yes	yes
states t considered	all $t \in [0, d] \bigcap Z$	only t, where the slope of the function $F_l(t)$ is changed	only t from the set Θ_l
The running time for the initial instance	$O(n \min\{d, UB\})$	$O(n \min\{d, UB\})$	$O(n \min\{d, UB\})$
- of the problem $1 \vert\vert \sum GT_j$ is	$O(nd_{max})$	$O(n \min\{d_{max}, UB\})$	$O(n \min\{d_{max}, UB\})$
- of the problem $1(no\text{-}idle) \vert\vert \max \sum w_j T_j$ is	$O(n \min\{d_{max}, UB\})$	$O(n \min\{d_{max}, UB, \sum w_j\})$	$O(n \min\{d_{max}, UB\})$

$$\Theta_l = \{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_l p_l \mid x_1, x_2, \ldots, x_l \in \{0, 1\}\}$$

Comparison of Dynamic Programming and Graphical Algorithms

Note	Classical DPA	GrA	Alternative DPA
It finds all optimal schedules for all starting times $t \in [0, d]$ in time	$O(nd)$	$O(nd)$	-
If finds all optimal schedules for all starting times $t \in (-\infty, t_n^{UB}]$ in time	$O(nUB)$	$O(nUB)$	-
It finds all optimal schedules for all starting times $t \in (-\infty, +\infty)$ in time	$O(nF(\pi', d))$	$O(nF(\pi', d))$	-
The running time of the FPTAS is	$O(\frac{n^3}{\varepsilon} \log \frac{n}{\varepsilon}))$	$O(n^3/\varepsilon)^*$	$O(n^3/\varepsilon)^{**}$

* In this time, for all $t \in (-\infty, t_n^{UB}]$ solutions can be found with an absolute error restricted by εLB. For all $t \in [t_n^{LB}, t_n^{UB}]$, $t_n^{LB} \leq 0 \leq t_n^{UB}$, solutions can be found with a relative error restricted by ε.

** An approximate solution is only found for the starting time $t = 0$.

Graphical Algorithms and the corresponding FPTAS

Problem	Time complexity of GrA	Time complexity of FPTAS	Time complexity of classical DPA
$1\|\|\sum w_jU_j$	$O(\min\{2^n, n \cdot \min\{d_{max}, F_{opt}\}\})$ [5]	-	$O(nd_{max})$
$1\|d_j = d'_j + A\|\sum U_j$	$O(n^2)$ [5]	-	$O(n\sum p_j)$
$1\|\|\sum GT_j$	$O(\min\{2^n, n \cdot \{d_{max}, nF^*\}\})$	$O(n^2 \log\log n + \frac{n^2}{\varepsilon})$	$O(nd_{max})$
$1\|\|\sum T_j$ special case $B-1$	$O(\min\{2^n, n \cdot \min\{d_{max}, F^*\}\})$	$O(n^2/\varepsilon)$	$O(nd_{max})$
$1\|\|\sum T_j$ special case $B-1G$	$O(\min\{n^2 \cdot \min\{d_{max}, F^*\}\})$	$O(n^3/\varepsilon)$	$O(n^2d_{max})$
$1\|d_j = d\|\sum w_jT_j$	$O(\min\{n^2 \cdot \min\{d, F^*\}\})$	$O(n^3/\varepsilon)$	$O(n^2d_{max})$
$1(no\text{-}idle)\|\|\max \sum w_jT_j$	$O(\min\{2^n, n \cdot \min\{d_{max}, nF^*, \sum w_j\}\})$ [5]	$O(n^2 \log\log n + \frac{n^2}{\varepsilon})$	$O(nd_{max})$
$1(no\text{-}idle)\|\|\max \sum T_j$	$O(n^2)$ [4]	-	$O(nd_{max})$

Our publications I

Статьи в журналах/сборниках из перечня Web of Science/Scopus

Лазарев А.А., Архипов Д.И., Werner F.?. Scheduling jobs with equal processing times on a single machine: minimizing maximum lateness and makespan // Optimization Letters. 2017. Volume 11, Issue 1. C. 165–177, http://link.springer.com/article/10.1007/s11590-016-1003-y. 2017

Архипов Д.И., Лазарев А.А. Minimizing the Maximal Weighted Lateness of Delivering Orders between Two Railroad Stations // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77, No. 12. C. 2091–2109. 2016

Гафаров Е.Р., Долгий А.Б., Лазарев А.А., Werner F.?. A New Effective Dynamic Program for an Investment Optimization Problem // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77, No. 9. C. 1633–1648. 2016

Зиндер Я.А., Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Тарасов И.А., Хуснуллин Н.Ф. Two-Station Single Track Scheduling Problem // IFAC-PapersOnLine. 2016. Т. 49, № 12. С. 231-236 http://www.sciencedirect.com/science/journal/24058963/49/12. 2016

Лазарев А.А., Архипов Д.И. Minimization of the Maximal Lateness for a Single Machine // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77, No. 4. C. 656–671 http://link.springer.com/article/10.1134/S000511791604010X. 2016

Лазарев А.А., Архипов Д.И., Werner F.?. On a generalized single machine scheduling problem with time-dependent processing times // IFAC-PapersOnLine. 2016. Т. 49, № 12. С. 226–230 http://www.sciencedirect.com/science/journal/24058963/49/12. 2016

Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Тарасов И.А. Two-Directional Traffic Scheduling Problem Solution for a Single-Track Railway with Siding // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77, No. 12. C. 2118–2131. 2016

Мусатова Е.Г., Лазарев А.А., Пономарев К.В., Ядренцев Д.А., Бронников С.В., Хуснуллин Н.Ф. A Mathematical Model for the Astronaut Training Scheduling Problem // IFAC-PapersOnLine. 2016. Т. 49, № 12. С. 221-225 http://www.sciencedirect.com/science/journal/24058963/49/12. 2016

Стрекаловский А.С., Мусатова Е.Г. On Solution of One Equation with d.c. Function // Informatica. 2016. Vol. 27, No. 2. C. 367–386. 2016

Our publications II

Ульянов М.В., Сметанин Ю.Г., Пестова А.С. Энтропийный подход к построению меры символьного разнообразия слов и его применение к кластеризации геномов растений // Математическая биология и биоинформатика. 2016. Т. 11. № 1. С. 114–126. 2016

Гафаров Е.Р., Долгий А.Б., Лазарев А.А. Two-Station Single-Track Railway Scheduling Problem With Trains of Equal Speed // Computers Industrial Engineering. 2015. . С. 1-20 doi: http://authors.elsevier.com/sd/article/S0360835215001230. 2015

Сметанин Ю.Г., Ульянов М.В. Reconstruction of a Word from a Finite Set of its Subwords Under the Unit Shift Hypothesis. II. Reconstruction with Forbidden Words // Cybernetics and Systems Analysis. 2015. Volume 51, Issue 1. С. 157-164. 2015

Гафаров Е.Р., Долгий А.Б., Werner F.?. A new graphical approach for solving single-machine scheduling problems approximately // International Journal of Production Research. 2014. http://dx.doi.org/10.1080/00207543.2014.922708. С. 1-17. 2014

Гафаров Е.Р., Лазарев А.А., Werner F. Approximability results for the resource-constrained project scheduling problem with a single type of resources // Annals of Operations Research. 2014. Vol. 213, Issue 1. С. 115–130. 2014

Сметанин Ю.Г., Ульянов М.В. Reconstruction of a word from a finite set of its subwords under the unit shift hypothesis. I. Reconstruction without for bidden words // Cybernetics and Systems Analysis. 2014. Volume 50, Issue 1. С. 148-156. 2014

Гафаров Е.Р., Долгий А.Б. Two-dedicated-machine scheduling problem with precedence relations to minimize makespan // Optimization Letters. 2013. Vol. 7. С. DOI 10.1007/s11590-013-0671-0. 2013

Гафаров Е.Р., Лазарев А.А., Werner F. A note on the paper 'Single machine scheduling problems with financial resource constraints: Some complexity results and properties' by E.R. Gafarov et al. // Mathematical Social Sciences. 2013. 65, No.3 . С. 232 http://www.zentralblatt-math.org/zmath/en/search/?q=ai:lazarev.alexander-a. 2013

Гафаров Е.Р., Лазарев А.А., Werner F. Single machine total tardiness maximization problems:complexity and algorithms // Annals of Operations Research. 2013. DOI 10.1997/s10479-012-1288-x. С. 121-136. 2013

Гафаров Е.Р., Лазарев А.А., Werner F. A note on a single machine scheduling problem with generalized total tardiness objective function // Information Processing Letters. 2012. 112, № 3. С. 72-76. http://www.zentralblatt-math.org/zmath/en/search/?q=ai:lazarev.a. 2012

Гафаров Е.Р., Лазарев А.А., Werner F. Transforming a pseudo-polynomial algorithm for the single machine total tardiness maximization problem into a polynomial one // Annals of Operations Research. 2012. DOI 10.1007/s10479-011-1055-4. С. 1-17 DOI 10.1007/s10479-011-1055-4. 2012

Гафаров Е.Р., Лазарев А.А., Werner F. Transforming a pseudo-polynomial algorithm for the single machine total tardiness maximization problem into a polynomial one. // Annals of Operations Research. 2012. No.196. С. 247-261. http://www.zentralblatt-math.org/zmath/en/search/?q=ai:lazarev.alexander-a. 2012

Гафаров Е.Р., Лазарев А.А., Werner F. A Note on a Single Machine Scheduling Problem with Generalized Total Tardiness Objective Function // Information Processing Letters. 2011. to appear in Information Processing Letters; DOI: 10.1016/j.ipl.2011.10.1013; published online. С.
http://www.sciencedirect.com/science?$_ob = ArticleListURL_method = list_ArticleListID = 1849808165_sort = r_st = 13view = c_acct = C000228598_version = 1_urlVersion = 0_userid = 10md5 = 9d78eb57f43a7e7dab5822158441bb0dsearchtype = a.2011..,..,WernerF.Singlemachineschedulingproblemswithfinancialresourceconstraints : somecomplexityresultsandproperties//MathematicalSocialSciences.2011.62, No.1..http : //www.zentralblatt - math.org/zmath/en/search/?q = ai : lazarev.alexander - a.2011$

Гафаров Е.Р., Лазарев А.А., Werner F. Single Machine Scheduling Problems with Financial Resource Constraints: Some Complexity Results and Properties // Mathematical Social Sciences. 2011. 62. С. 7-13. 2011

Werner F., Лазарев А.А. Foreword to the thematical issue devoted to the seventieth anniversary of Academician V. S. Tanaev. // Automation and Remote Control. 2010. 71, No. 10. С. 2019-2020. 2010

Гафаров Е.Р., Лазарев А.А., Werner F. Algorithms for some maximization scheduling problems on a single machine // Automation and Remote Control. 2010. 71, No.10. С. 2070-2084. http://www.zentralblatt-math.org/zmath/en/search/?q=ai:lazarev.alexander-a. 2010

Our publications IV

Лазарев А.А., Кварацхелия А.Г. Properties of optimal schedules for the minimization total weighted completion time in preemptive equal-length job with release dates scheduling problem on a single machine // Automation and Remote Control. 2010. 71, No. 10. C. 2085-2092. http://www.zentralblatt-math.org/zmath/en/search/?q=ai:lazarev.alexander-a. 2010

Cheng T. C. E., Лазарев А.А., Гафаров Е.Р. A hybrid algorithm for the single-machine total tardiness problem // Computers Operations Research. 2009. 36, No.2. C. 308-315 http://www.zentralblatt-math.org/zmath/en/search/?q=ai:lazarev.alexander-a. 2009

Лазарев А.А., Werner F. A Graphical Realization of the Dynamic Programming Method for Solving NP-Hard Combinatorial Problems // Computers Mathematics with Applications. 2009. 58. C. 619-631. 2009

Лазарев А.А., Werner F. A graphical realization of the dynamic programming method for solving NP-hard combinatorial problems / Mathematical and Computer Modelling. Oxford: Elsevier Science, 2009. 58, No.4. C. 619-631. http://www.zentralblatt-math.org/zmath/en/search/?q=ai:lazarev.alexander-a. 2009

Лазарев А.А., Werner F. Algorithms for Special Cases of the Single Machine Total Tardiness Problem and an Application to the Even-Odd Partition Problem / Mathematical and Computer Modelling. Magdeburg: Elsevier, 2009. 49, №9-10. C. 2061-2072. 2009

Лазарев А.А., Werner F. Algorithms for special cases of the single machine total tardiness problem and an application to the even–odd partition problem / Mathematical and Computer Modelling. Oxford: Elsevier Science, 2009. 49, No.9-10. C. 2061-2072. http://www.zentralblatt-math.org/zmath/en/search/?q=ai:lazarev.alexander-a. 2009

Лазарев А.А., Гафаров Е.Р. On project scheduling problem // Automation and Remote Control. 2008. T. 69, №12. C. 2070-2087 http://www.zentralblatt-math.org/zmath/en/search/?q=ai:lazarev.alexander-a. 2008

Лазарев А.А. Graphical approach to combinatorial optimization // Automation and Remote Control. 2007. 68, No. 4. C. 583-592. 2007

Гафаров Е.Р., Лазарев А.А. A special case of the single-machine total tardiness problem is NP-hard / Journal of Computer and Systems Sciences International. M.: Published in Russian in Izvestiya Akademii Nauk. Teoriya i Sistemy Upravleniya, 2006. 45, No.3. C. 450-458. 2006

Our publications V

Лазарев А.А. The Pareto-optimal set of the NP-hard problem of minimization of the maximum lateness for a single machine / Journal of Computer and Systems Sciences International. M.: SP MAIK Nauka/Interperiodica, 2006. 45, No. 6. C. 943-949. 2006

Статьи в журналах/сборниках из перечня ВАК

Никончук Д.А., Гафаров Е.Р. Объединение разрозненных информационных систем 1С в одну без потрясений // Газовая промышленность. 2017. №2 (748). С. 74-77. 2017

Архипов Д.И., Лазарев А.А. Минимизация максимального взвешенного временно'го смещения доставки заказов между двумя железнодорожными стпнциями // Автоматика и телемеханика. 2016. №12. С. 3-25. 2016

Гафаров Е.Р. Графический метод решения задач комбинаторной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2016. № 12. С. 26-36. 2016

Гафаров Е.Р., Долгий А.Б., Лазарев А.А., Werner F.?. Новый эффективный алгоритм решения задачи об инвестициях // Автоматика и телемеханика. 2016. №9. С. 150-165. 2016

Лазарев А.А., Архипов Д.И. Минимизация максимального временного смещения для одного прибора // Автоматика и телемеханика. 2016. № 4. С. 134-152. 2016

Лазарев А.А., Бронников С.В., Герасимов А.Р., Мусатова Е.Г., Петров А.С., Пономарев К.В., Харламов М.М., Хуснуллин Н.Ф., Ядренцев Д.А. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАНИРОВАНИЯ ПОДГОТОВКИ КОСМОНАВТОВ // Управление большими системами. 2016. Вып. 63. С. 129-154. 2016

Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Тарасов И.А. Решение задачи планирования двухстороннего движения на однопутном участке железной дороги с разъездом // Автоматика и телемеханика. 2016. № 11. С. 158-174. 2016

Некрасов И.В. СИНТЕЗ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ЦИФРОВОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 3. С. 158-165. 2016

Our publications VI

Ульянов М.В., Жукова Г.Н., Головешкин В.А., Фомичев М.И. Об одном обобщенном представлении классов индивидуальных задач коммивояжера // Автоматизация. Современные технологии. 2016. №10. С. 22-29. 2016

Лазарев А.А., Коренев П.С., Сологуб А.А. Метрика для задачи минимизации суммарного запаздывания // Управление Большими Системами. 2015. Выпуск 57. С. 123-137. 2015

Лазарев А.А., Тарасов И.А. Составление оптимального расписания движения поездов между двумя станциями, соединенными однопутной железной дорогой с разъездом // Управление большими системами. 2015. вып. 58. С. 244-284 http://ubs.mtas.ru/upload/bibray/ub55810/pdf. 2015

Некрасов И.В. ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛГОРИТМА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПРИ ВАРЬИРОВАНИИ ПЕРИОДА КВАНТОВАНИЯ ДИСКРЕТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ОБЪЕКТА // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. № 1. С. 16-23. 2015

Ульянов М.В., Головешкин В.А., Выборнов А.Н. Операционная чувствительность алгоритмов // Автоматизация. Современные технологии. 2015. № 8. С. 41-46. 2015

Ульянов М.В., Фомичев М.И. Resource characteristics of ways to organize a decision tree in the branch-andbound method for the traveling salesmen problem // Business Informatics. 2015. №. 4 (34). С. 38-46. 2015

Головешкин В.А., Пономарёв А.В., Ульянов М.В., Жукова Г.Н. Аналитическая функция трудоемкости в среднем алгоритма сортировки индексами на основе распределения размаха варьирования // Автоматизация и современные технологии. 2014. № 6. С. 11-17. 2014

Лазарев А.А. Модели и методы решения задач теории расписаний // Автоматика и телемеханика. 2014. №7. С. 14-16. 2014

Некрасов И.В., Грачёв А.С., Путин С.В. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЯ АБСОЛЮТНОГО ДАВЛЕНИЯ В МАГИСТРАЛЬНОМ НЕФТЕПРОВОДЕ И СПОСОБЫ ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. 2014. № 1 (13). С. 44-47. 2014

Our publications VII

Сметанин Ю.Г., Ульянов М.В. Мера символьного разнообразия: подход комбинаторики слов к определению обобщенных характеристик временных рядов // Бизнес-Информатика. 2014. № 3(29). С. 40-48. 2014

Сметанин Ю.Г., Ульянов М.В. ПСЕВДОЕДИНИЦЫ В РАСШИРЕНИИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ГРУППЫ ПО МОДУЛЮ КРИПТОСИСТЕМЫ RSA // Автоматизация и современные технологии. 2014. № 9 . С. 34–37. 2014

Сметанин Ю.Г., Ульянов М.В. Реконструкция слов по конечному мультимножеству подслов в гипотезе сдвига 1. часть i: реконструкция без запретов // Кибернетика и системный анализ. 2014. № 1. С. 168-177. 2014

Головешкин В.А., Пономарёв А.В., Ульянов М.В. О возможном матричном представлении аналитического решения одного нелинейного рекуррентного соотношения // Автоматизация и современные технологии. 2013. № 8. С. 17-23. 2013

Сметанин Ю.Г., Ульянов М.В. Алгебраическая структура с частичными операциями и модель вычислений для арифметики ограниченных целых неотрицательных чисел // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18 № 4. С. 48-63. 2013

Сметанин Ю.Г., Ульянов М.В. Подход к определению характеристик колмогоровской сложности временных рядов на основе символьных описаний // Бизнес-Информатика. 2013. № 2 (24). С. 49-54. 2013

Головешкин В.А., Пономарёв А.В., Ульянов М.В. Регулярные деревья рекурсии: описание и теоретический анализ // Автоматизация и современные технологии. 2012. № 9. С. 16-22. 2012

Кривенцов А.С., Ульянов М.В. Интервальная оценка параметров бета-распределения при определении доверительной трудоемкости алгоритмов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2012. № 7. С. 210-219. 2012

Лазарев А.А., Мусатова Е.Г. Целочисленные постановки задачи формирования железнодорожных составов и расписания их движения // Управление большими системами. 2012. вып. 38. С. 161-169. 2012

Our publications VIII

Петрушин В.Н., Ульянов М.В., Чертихина И.А., Никульчев Е.В. Бикритериальный метод построения и оценки качества гистограмм // Информационные технологии и вычислительные системы. 2012. № 4. С. 22-31. 2012

Алескеров Ф.Т., Карпов И.В. Аксиоматическое описание правила передачи голосов // Экономический Журнал ГУ-ВШЭ. 2011. Том 15, №2. С. 135-154. 2011

Головешкин В.А., Петрушин В.Н., Ульянов М.В. Количественные оценки информационной чувствительности алгоритмов // Информационные технологии и вычислительные системы. 2011. № 4. С. 45-57. 2011

Головешкин В.А., Пономарёв А.В., Ульянов М.В. Аналитическое решение класса рекуррентных соотношений с аддитивной функцией степенного вида в целях анализа трудоёмкости рекурсивных алгоритмов // Автоматизация и современные технологии. 2011. № 3. С. 25-29. 2011

Мокряков А.В., Цурков В.И. Восстановление 2-комплексов по целочисленному неотрицательному вектору // Автоматика и телемеханика. 2011. № 12. С. 130-143. 2011

Мусатова Е.Г., Стрекаловский А.С. The Quadratic-Linear Bilevel Problems Solving via Nonconvex Constraint Problems // International Journal of Biomedical Soft Computing and Human Sciences, Special issue on Variational Inequality and Combinatorial Problems. 2011. Т. 18, № 1. С. 63-67. 2011

Наумова О.А., Ульянов М.В. Классификация методов построения алгоритмических систем // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16 № 1. С. 105-118. 2011

Werner F., Лазарев А.А. Предисловие к тематическому выпуску, посвященному 70-летию академика В.С. Танаева // Автоматика и телемеханика. 2010. № 10. С. 3-5. 2010

Гафаров Е.Р., Лазарев А.А., Werner F. Алгоритмы решения задач максимизации суммарного запаздывания и максимизации количества запаздывающих требований для одного прибора // Автоматика и телемеханика. 2010. № 10. С. 63-79. 2010

Лазарев А.А., Кварацхелия А.Г. Метрики в задачах теории расписаний // Доклады Академии наук. 2010. Т.432, №6. С. 746-749. 2010

Our publications IX

Лазарев А.А., Кварацхелия А.Г. Свойства оптимальных расписаний задачи теории расписаний минимизации суммарного взвешенного момента окончания для одного прибора // Автоматика и телемеханика. 2010. 10. С. 80-89. 2010

Лазарев А.А. Оценки абсолютной погрешности и схема приближённого решения задач теории расписаний // Журнал Вычислительной математики и математической физики. 2009. Т.49, №2. С. 382-396. 2009

Мазуркевич Е.О., Мусатова Е.Г., Стрекаловский А.С. О численном решении линейной задачи дополнительности // Журнал Вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49, № 8. С. 1385-1398. 2009

Мусатова Е.Г., Стрекаловский А.С. О решении систем нелинейных алгебраических уравнений // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2009. №24, вып. 4. С. 30-36. 2009

Лазарев А.А., Гафаров Е.Р. К решению задачи построения расписания выполнения проекта // Автоматика и телемеханика. 2008. №12. С. 86-104. 2008

Лазарев А.А., Гафаров Е.Р. Преобразование сетевого графика задач теории расписаний с ограничениями предшествования // Доклады Академии наук. 2008. Т.424, №1. С. 7-9. 2008

Гафаров Е.Р. Гибридный алгоритм решения задачи минимизации суммарного запаздывания для одного прибора // Информационные технологии. 2007. №1. С. 30-37. 2007

Лазарев А.А. Графический подход к решению задач комбинаторной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2007. №4. С. 13-23. 2007

Лазарев А.А., Кварацхелия А.Г., Гафаров Е.Р. Алгоритмы решения *NP*-трудной проблемы минимизации суммарного запаздывания для одного прибора // Доклады Академии наук. 2007. Т.412, №6. С. 739-742. 2007

Лазарев А.А. Оценка абсолютной погрешности задач теории расписаний с критерием минимизации максимального временного смещения // Доклады Академии наук. 2007. Т.415, №4. С. 446-449. 2007

Лазарев А.А. Решение NP-трудной задачи теории расписаний минимизации суммарного запаздывания // Журнал Вычислительной математики и математической физики. 2007. Т.47, №6. С. 1087-1099. 2007

Our publications X

Гафаров Е.Р., Лазарев А.А. Доказательство NP-трудности одного частного случая задачи минимизации суммарного запаздывания // Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. № 3. С. 120-128. 2006

Лазарев А.А. Парето-оптимальное множество *NP*-трудной задачи минимизации максимального временного смещения // Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. № 6. С. 103-110. 2006

Лазарев А.А., Садыков Р.Р., Севастьянов С.В. Схема приближённого решения проблемы $1 \mid r_j \mid L_{\max}$ // Дискретный анализ и исследование операций. 2006. Т. 13, №1. С. 57-76. 2006 Статьи в журналах/сборниках

Гафаров Е.Р. Программные решения для составления и корректировки школьного расписания в соответствии с требованиями СанПиН и ФГОС // Информатика и образование. 2016. №3. С. 30-32. 2016

Некрасов И.В. СЛОЖНОСТЬ И КРИТЕРИИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ К ОБЛАСТИ «BIG DATA» // АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ПРОИЗВОДСТВА. 2016. № 1(11). С. 50-55. 2016

Гафаров Е.Р., Долгий А.Б., Лазарев А.А., Werner F.?. A Graphical Approach to Solve an Investment Optimization Problem // J Math Model Algor. 2014. vol.13, №4. С. 597-614. 2014

Головешкин В.А., Ульянов М.В. Regular Recursion Trees: Description and Theoretical Analysis // Global Journal of Science Frontier Research Mathematics and Decision Sciences. 2013. Vol. 13 Iss. 10 . С. 1-11. 2013

Головешкин В.А., Ульянов М.В. A Measure of Functions' Asymptotic Growth and the Complexity Classification of Computer Algorithms // Journal of Emerging Trends in Computing and Information Sciences. 2012. Vol. 3 No. 11. С. 1498-1505. 2012

Лазарев А.А., Мусатова Е.Г. Целочисленные постановки задачи формирования железнодорожных составов и расписания их движения // Проблемы управления на железнодорожном транспорте. 2012. . С. 161-169. 2012

Our publications XI

Лазарев А.А., Сальников А.М., Баранов А.В. Graphical Algorithm for the Knapsack Problem / Proceedings of the 11th International Conference on Parallel Computing Technologies, PaCT 2011, Kazan, Russia. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin, 2011. Volume 6873, DOI: 10.1007/978-3-642-23178-0. C. 459-466. 2011

Лазарев А.А., Садыков Р.Р., Севастьянов С.В. A Scheme of Approximation Solution of Problem 1 | rj | Lmax // Journal of Applied and Industrial Mathematics (Сибирский журнал индустриальной математики Дискретный анализ и исследование операций). 2006. No. 1. C. 57–76. 2006

Our reports I

Пленарные доклады

Ульянов М.В. Операционная и информационная чувствительность: новые актуальные оценки качества компьютерных алгоритмов / Материалы 3-ей Международной конференции «Устойчивость и процессы управления» (Санкт-Петербург, 2015). СПб.: СпБГУ, 2015. С. 2-15. 2015

Ульянов М.В. Прогнозирование сложности индивидуальных задач коммивояжера / Материалы 16-й Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям «YM-2015». Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2015. С. 15. 2015

Ульянов М.В., Сметанин Ю.Г. Реконструкция слов по мультимножеству подслов в гипотезе сдвига 1 / Материалы 21-й Международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии» (ИСТ-2015, Нижний Новгород). Н. Новгород: Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, 2015. С. 263-264. 2015 Пленарные доклады и доклады из перечня Web of Science/Scopus

Лазарев А.А., Архипов Д.И. Minimization of maximum lateness with equal processing times for single machine / Proceedings of the 15th IFAC/IEEE/IFIP/IFORS Symposium Information Control Problems in Manufacturing (INCOM-2015, Ottawa, Canada). Ottawa, Canada: IFAC-PapersOnLine in partnership with Elsevier, 2015. C. 806–809. 2015

Гафаров Е.Р., Долгий А.Б., Лазарев А.А., Werner F. A Graphical Approach for Solving Single Machine Scheduling Problems Approximately / Proceedings of the 7th IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management, and Control (MIM'2013, Saint Petersburg). СПб.: ИПУ РАН, 2013. С. 1356-1361. 2013

Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Хуснуллин Н.Ф. Schedule for one locomotive in a 3 station circuit / Proceedings of the 7th IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management, and Control (MIM'2013, Saint Petersburg). СПб.: ИПУ РАН, 2013. С. 1684-1687. 2013

Лазарев А.А., Carballo L., Vakhania N., Werner F. Search on the enumeration tree in the multiprocessor job-shop problem / Proceedings of the 14th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing (INCOM'12, Bucharest). Bucharest: University Politehnica of Bucharest, CIMR Research Centre, 2012. C. 381-386. 2012

Our reports II

Лазарев А.А., Гафаров Е.Р., Werner F. A Graphical Approach to Solve Combinatorial Problems: Algorithms and Some Computational Results / Proceedings of the 14th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing (INCOM'12, Bucharest). Bucharest: University Politehnica of Bucharest, CIMR Research Centre, 2012. С. 403-408. 2012

Лазарев А.А., Коренев П.С. Metric and Approximated Solution of the Single Machine Total Tardiness Minimization Scheduling Problem / Proceedings of the 14th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing (INCOM'12, Bucharest). Bucharest: University Politehnica of Bucharest, CIMR Research Centre, 2012. С. 399-402. 2012

Доклады

Архипов Д.И., Лазарев А.А., Werner F.?. Метод "наполнения множеств"решения задач теории расписаний для одного прибора / Труды 7-й Международной научной конференции «Теория расписаний и методы декомпозиции. Танаевские чтения» (Беларусь, Минск, 2016). Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2016. С. 4-8. 2016

Бронников С.В., Герасимов А.Р., Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Петров А.С., Пономарев К.В., Харламов М.М., Хуснуллин Н.Ф., Ядренцев Д.А. К решению задачи автоматизации планирования подготовки космонавтов для работы на МКС / Труды 7-й Международной научной конференции «Теория расписаний и методы декомпозиции. Танаевские чтения» (Беларусь, Минск, 2016). Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2016. С. 23-27. 2016

Лазарев А.А., Бронников С.В., Герасимов А.Р., Мусатова Е.Г., Петров А.С., Пономарев К.В., Харламов М.М. Применение методов RCPSP для планирования подготовки космонавтов / Материалы 13-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2016, Самара). М.: ИПУ РАН, 2016. С. 444-453. 2016

Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Тарасов И.А. Алгоритмы построения оптимальных расписаний на однопутной линии железной дороги / Материалы 13-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2016, Самара). М.: ИПУ РАН, 2016. С. 643-651. 2016

Our reports III

Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Тарасов И.А., Зиндер Я.А. Dynamic programming approaches for single-track scheduling problem / Proceedings of the 7th International Conference on Optimization Methods and Appliations "Optimization and applications"(OPTIMA-2016). М.: ФГБУН Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 2016. С. 95-96. 2016

Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Тарасов И.А. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПЛАНИРОВАНИЯ ПЕРЕВОЗОК НА ОДНОПУТНОМ УЧАСТКЕ ЖЕЛЕЗНОЙ ДОРОГИ С РАЗЪЕЗДОМ / Труды 7-й Международной научной конференции «Теория расписаний и методы декомпозиции. Танаевские чтения» (Беларусь, Минск, 2016). Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2016. С. 103-107. 2016

Лазарев А.А., Некрасов И.В., Правдивец Н.А. Оптимальное планирование загрузки ресурсов предприятия: базовая постановка задачи в непрерывном времени и ее расширения / Труды 7-й Международной научной конференции «Теория расписаний и методы декомпозиции. Танаевские чтения» (Беларусь, Минск, 2016). Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2016. С. 108-113. 2016

Лазарев А.А., Хуснуллин Н.Ф., Мусатова Е.Г., Петров А.С., Герасимов А.Р., Харламов М.М., Ядренцев Д.А., Пономарев К.В., Бронников С.В. Cosmonauts Training Scheduling Problem / Proceedings of the 7th International Conference on Optimization Methods and Appliations "Optimization and applications"(OPTIMA-2016). М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 2016. С. 93-94. 2016

Архипов Д.И., Лазарев А.А. Алгоритмы формировния составов и доставки грузов между железнодорожными станциями / Труды 4-ой научно-технической конференции с международным участием «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте. Компьютерное и математическое моделирование» (ИСУЖТ-2015, Москва). М.: ОАО "НИИАС 2015. С. 66-68 http://www.vniias.ru/images/files/ISUZHT-2015

Бронников С.В., Гущина В.П., Лазарев А.А., Морозов Н.Ю., Сологуб А.А., Ядренцев Д.А. Three approaches to solving the problem of cosmonauts' training planning / Proceedings of the 7th Multidisciplinary International Conference on Scheduling: Theory and Applications (Prague, 2015). Prague: MISTA, 2015. С. http://schedulingconference.org/proceedings/2015/mista2015.pdf. 2015

Our reports IV

Лазарев А.А., Архипов Д.И., Werner F.?. Single machine scheduling: Fnding the Pareto Set for jobs with equal processing times with respect to criteria Lmax and Cmax. / Proceedings of the 7th Multidisciplinary International Conference on Scheduling: Theory and Applications (Prague, 2015). Prague: MISTA, 2015. C. 797-800 http://schedulingconference.org/proceedings/2015/mista2015.pdf. 2015

Лазарев А.А., Тарасов И.А. Two-station single track railway with a siding scheduling problem / Труды VI International Conference on Optimization Methods and Applications. (OPTIMA-2015, Petrovac). М.: Научное издание. Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, 2015. С. 198-199 http://www.cima.uevora.pt/optima2015/Optima2015.pdf. 2015

Лазарев А.А., Тарасов И.А., Мусатова Е.Г., Хуснуллин Н.Ф. Алгоритмы построения расписаний движения поездов между двумя станциями на однопутной железной дороге / Труды 4-ой научно-технической конференции с международным участием «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте. Компьютерное и математическое моделирование» (ИСУЖТ-2015, Москва). М.: ОАО "НИИАС 2015. С. 24-27 http://www.vniias.ru/images/files/ISUZHT-2015

Архипов Д.И., Лазарев А.А. Минимизация максимального взвешенного временного смещения для заказов на доставку грузов между двумя станциями в условиях ограниченного движения составов / Труды 3-й научно-технической конференции с Международным участием «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте – ИСУЖТ-2014» (Москва, 2014). М.: ОАО "НИИАС 2014. С. 7-10. 2014

Лазарев А.А., Гафаров Е.Р. Эффективные алгоритмы решения задач железнодорожного планирования / Труды 4-й Международной Конференции «Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии» (Кишинёв, 2014). Кишинёв: Editura Evrica, 2014. Т. 2. С. 295-307. 2014

Лазарев А.А., Садыков Р.Р. Задача управления парком грузовых железнодорожных вагонов / Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014, Москва). М.: Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, 2014. С. 5083-5093. 2014

Our reports V

Некрасов И.В. СТРУКТУРИЗАЦИЯ И ХРАНЕНИЕ ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ / Труды 4-го научно-технического семинара «Современные проблемы прикладной математики, информатики, автоматизации и управления» (Севастополь, 2014). М.: ИПИ РАН, 2014. С. 109-115. 2014

Сметанин Ю.Г., Ульянов М.В. Мера символьного разнообразия — характеристика временных рядов / Материалы 3-й Международной научно-практической конференции «Информационные управляющие системы и технологии» (ИУСТ-ОДЕССА-2014). Одесса: ВГАВТ, 2014. С. 19-21. 2014

Сметанин Ю.Г., Ульянов М.В. Энтропийные характеристики разнообразия в символьном представлении временных рядов / Труды 9-й Международной научно-практической конференции «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (Москва, 2014). М.: ИНТУИТ.РУ, 2014. С. 426-436. 2014

Хуснуллин Н.Ф. Построение расписания движения поездов при проведении ремонтных работ на двухпутной железной дороге / Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014, Москва). М.: Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, 2014. С. 5006-5010. 2014

Гафаров Е.Р., Долгий А.Б., Лазарев А.А. SOLUTION ALGORITHMS FOR THE TWO-STATION SINGLE TRACK RAILWAY SCHEDULING PROBLEM / Proceedings of the 6th Multidisciplinary International Scheduling Conf erence: Theory 6th Multidisciplinary International Scheduling Conf erence: Theory Applications (MISTA 2013, Ghent, Belgium). Gent, Belgium: The Belgian Operational Research Society, 2013. С. 636-640. 2013

Гафаров Е.Р., Долгий А.Б., Лазарев А.А., Werner F. A Graphical Algorithm for Solving an Investment Optimization Problem / Proceedings of the 6th Multidisciplinary International Scheduling Conf erence: Theory 6th Multidisciplinary International Scheduling Conf erence: Theory Applications (MISTA 2013, Ghent, Belgium). Gent, Belgium: The Belgian Operational Research Society, 2013. С. 290-299. 2013

Гафаров Е.Р., Лазарев А.А. Математические методы оптимизации при составлении учебного расписания / Сборник научных трудов 13-й Международной научно-практической конференции «Технологии "1С"для эффективного обучения и подготовки кадров в целях повышения производительности труда» (Москва, 2013). М.: ООО "1С-Паблишинг 2013. С. 51-55. 2013

Our reports VI

Садыков Р.Р., Лазарев А.А., Ширяев В.В., Стратонников А.А. Solving a Freight Railcar Flow Problem Arising in Russia / Proceedings of the 13th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modelling, Optimization and Systems (ATMOS'13, Leibniz, Germany). Leibniz, Germany: Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, Dagstuhl Publishing, Germany, 2013. C. 55-67, http://drops.dagstuhl.de/opus/frontdoor.php?source$_o$*pus* =
4244.2013.., .., ..*MinimizationofmaximumlatenessforMstationswithtreetopology* / *ProceedingsoftheIIIInternationalConferenc*
2012, *CostadaCaparica*, *Portugal*).. : ..., 2012..42 − 47.2012

Гафаров Е.Р., Долгий А.Б., Лазарев А.А. Some Complexity Results for the Simple Assembly Line Balancing Problem / Proceedings of the III International Conference on Optimization Methods and Application (OPTIMA-2012,Costa da Caparica, Portugal). М.: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, 2012. С. 81-85. 2012

Гафаров Е.Р., Лазарев А.А. Алгоритмы решения для задач теории расписаний на однопутной железной дороге / Труды 1-й Научно-технической конференции «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте» (ИСУЖТ-2012, Москва). М.: ОАО "НИИАС 2012. С. 114- 129. 2012

Коренев П.С., Лазарев А.А. An Approximation Scheme for the
$1|r_j|\sum T_j$ *SchedulingProblemwithGuaranteedAbsoluteError* / *Proceedingsofthe*13*thInternationalConferenceonProjectManage*
KATHOLIEKEUNIVERSITEITLEUVEN, 2012..195 −
198.2012.., ..*Metricforthetotaltardinessminimizationproblem* / *ProceedingsoftheIIIInternationalConferenceonOptimizationMe*
2012, *CostadaCaparica*, *Portugal*).. : ..., 2012..134 − 139.2012

Лазарев А.А., Гафаров Е.Р., Долгий А.Б. Notes on Complexity of the Simple Assembly Line Balancing Problem / Труды 3-й Всероссийской конференции с международным участием «Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения» (УКИ-2012, Москва). М.: ИПУ РАН, 2012. С. 259-266. 2012

Лазарев А.А., Коренев П.С. Метрика для приближенного решения задач теории расписаний / Труды 3-й Всероссийской конференции с международным участием «Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения» (УКИ-2012, Москва). М.: ИПУ РАН, 2012. С. 267-274. 2012

Our reports VII

Лазарев А.А. Модели и алгоритмы решения задач управления грузовыми перевозками / Труды 3-й Всероссийской конференции с международным участием «Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения» (УКИ-2012, Москва). М.: ИПУ РАН, 2012. С. 371-380. 2012

Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Архипов Д.И. Задача минимизации максимального взвешенного временного смещения выполнения заказа для двух станций / Труды 3-й Всероссийской конференции с международным участием «Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения» (УКИ-2012, Москва). М.: ИПУ РАН, 2012. С. 1962-1967. 2012

Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Ласкова М.В. Оптимизация движения поездов в "узких местах"железнодорожной сети / Труды 1-й Научно-технической конференции «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте» (ИСУЖТ-2012, Москва). М.: ОАО "НИИАС 2012. С. 115-118. 2012

Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Ласкова М.В. Эвристический подход к решению задачи составления расписания движения грузовых составов между двумя станциями / Труды 3-й Всероссийской конференции с международным участием «Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения» (УКИ-2012, Москва). М.: ИПУ РАН, 2012. С. 1968-1973. 2012

Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Хуснуллин Н.Ф. Задача формирования железнодорожных составов и расписания их движения / Труды 1-й Научно-технической конференции «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте» (ИСУЖТ-2012, Москва). М.: ОАО "НИИАС 2012. С. 108-113. 2012

Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Хуснуллин Н.Ф. Задача формирования железнодорожных составов и расписания их двужения / Труды 1-й Научно-технической конференции «Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте» (ИСУЖТ-2012, Москва). М.: ОАО "НИИАС 2012. С. 108-113. 2012

Ласкова М.В., Лазарев А.А., Мусатова Е.Г. The Heuristic Approach to movement optimization on single-track part of the railway net / Proceedings of the III International Conference on Optimization Methods and Application (OPTIMA-2012,Costa da Caparica, Portugal). М.: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, 2012. С. 156-159. 2012

Our reports VIII

Мусатова Е.Г., Лазарев А.А., Хуснуллин Н.Ф. Special algorithm for Three-Stations Railway problem / Proceedings of the III International Conference on Optimization Methods and Application (OPTIMA-2012,Costa da Caparica, Portugal). М.: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, 2012. С. 187-191. 2012

Гафаров Е.Р., Лазарев А.А., Werner F. Scheduling Problems with Financial Resource Constraints / Proceedings of the 2nd International conference «Optimization and Applications» (Optima-2011, Petrovac, Montenegro). М.: Учереждение Российской академии наук Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, 2011. С. 82-85. 2011

Лазарев А.А., Архипов Д.И. Polynomial algorithm for the scheduling problem $1|pmtn, p=2, r_j=j-1, w_j \le w_{j+\mathbf{1}}|\sum w_j c_j$ / Труды 15-й Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения» (Иркутск, 2011). Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2011. Дискретная оптимизация. С. 25-28. 2011

Лазарев А.А., Баранов А.В. Graphical Approach for Combinatorial Problems / Proceedings of the 2nd International conference «Optimization and Applications» (Optima-2011, Petrovac, Montenegro). М.: Учереждение Российской академии наук Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, 2011. С. 149-152. 2011

Малышев А.В., Мусатова Е.Г. Биметодный подход к решению квадратично-линейной задачи двухуровневой оптимизации / Труды 15-й Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения» (Иркутск, 2011). Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. Т. 2. С. 126-130. 2011

Мусатова Е.Г. Один подход к решению двухуровневой квадратично-линейной задачи / Материалы 4-й Международной конференции «Математика, ее приложения и математическое образование» (МПМО'11, Улан - Удэ). Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2011. Ч. 1. С. 78-82. 2011

Гафаров Е.Р., Лазарев А.А., Werner F. Properties of Lower Bounds for the RCPSP / . Tours: -, 2010. С. С. 191-194. 2010

Гафаров Е.Р., Лазарев А.А., Werner F. Single Machine Scheduling With a Non-Renewable Financial Resource / . Lisbon: -, 2010. С. P. 69. 2010

Лазарев А.А. Dual and Reverse Problems to Minimize Maximum Penalty Scheduling Problems / . Lisbon: -, 2010. С. 1. 2010

Our reports IX

Лазарев А.А., Архипов Д.И., Карпов И.В. Polynomially Solvable Case of the NP-Hard Problem $1|r_j|L_{max}/.Tours: -, 2010..C.289 -$ 293.2010.., .., $WernerF.OnSingleMachineSchedulingandKnapsackProblemsWithOppositeOptimizationCriteria/.Malaga: -$, 2010..1.2010

Лазарев А.А., Посыпкин М.А. Optimization and Performance Analysis of Parallel Dynamic Programming Algorithm for Knapsack Problem / . Lisbon: -, 2010. C. 1. 2010

Лазарев А.А., Сальников А.М., Баранов А.В. Параллельный алгоритм решения задачи РАНЕЦ методом динамического программирования / Труды 6-й Международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления» (PACO'2012, Москва). М.: ИПУ РАН, 2010. С. 509-518. 2010

Мусатова Е.Г., Груздева Т.В. The Linear Bilevel Problems via Nonconvex Constraint Problems / Proceedings of the Toulouse Global Optimization Workshop (TOGO10, Toulouse). Тулуза: ENSEEIHT, Toulouse, France, 2010. C. 123-126. 2010

Кварацхелия А.Г., Лазарев А.А. An Algorithm for Total Weighted Completion Time Minimization in Preemptive Equal Job Length With Release Dates on a Single Machine / . Jerusalem: -, 2009. C. p.13-14. 2009

Кварацхелия А.Г., Лазарев А.А. Polynomial Algorithm for 1 | rj,pj = p, pmnt | wicj Scheduling Problem / . Dublin: -, 2009. C. 68-76. 2009

Кварацхелия А.Г., Лазарев А.А. Polynomial Algorithm for 1 | rj,pj = p, pmnt | wicj Scheduling Problem / . Moscow: -, 2009. C. -. 2009

Лазарев А.А. An Approximate Method for Solving Scheduling Problems / . Jerusalem: -, 2009. C. p.23-23. 2009

Лазарев А.А. An Approximation Method for Estimating Optimal Value of Minimizing Scheduling Problems / . Jerusalem: -, 2009. C. p.13-13. 2009

Лазарев А.А. Approximate Method for Solving Scheduling Problems With Minimax Criteria / . Moscow: ВЦ РАН, 2009. C. p.56-57. 2009

Лазарев А.А. Estimations of an Absolute Error and the Scheme of the Approached Solution Problems of the Scheduling Theory / . Moscow: -, 2009. C. 534-537. 2009

Our reports X

Лазарев А.А., Гафаров Е.Р. Estimation of Absolute Error for the Resources-Constrained Project Scheduling Problem / . Dublin: -, 2009. С. 8. 2009

Лазарев А.А., Гафаров Е.Р. Lower Bounds and Flat Graphs of Precedence Relations for the Resource-Constrained Project Scheduling Problem / . Moscow: -, 2009. С. 1512-1515. 2009

Лазарев А.А., Кварацхелия А.Г. Metrics for Scheduling Problems / . Moscow: ВЦ РАН, 2009. С. p.58-59. 2009

Гафаров Е.Р., Лазарев А.А. Lower Bounds and Flat Graphs of Precedence Relations for the Resource-Constrained Project Scheduling Problem / . Dubrovnik: IFAC Publication, 2008. С. 2. 2008

Лазарев А.А. Algorithms for the Special Case of the Total Tardiness Problem on a Single Machine / . Dubrovnik: IFAC Publication, 2008. С. 1. 2008

Лазарев А.А. Оценка абсолютной погрешности приближённых решений задач теории расписаний / . М.: РГГУ, 2008. С. С.317-319. 2008

Лазарев А.А. Построение приближённых решений задач теории расписаний с минимальной оценкой абсолютной погрешности / . М.: РГГУ, 2008. С. с. 363–366. 2008

Лазарев А.А. Estimation of Absolute Error for Minimization Maximum Lateness / . Paris: -, 2007. С. 7. 2007

Лазарев А.А., Гафаров Е.Р. Estimation of Lower Bounds for Resource Constrained Project Scheduling Problem / . М.: -, 2007. С. 3. 2007

Лазарев А.А. Оценка абсолютной погрешности приближенного решения NP-трудных задач теории расписаний / . -: -, 2007. С. 4. 2007

Лазарев А.А. Оценка абсолютной погрешности приближённых решений задач теории расписаний / . М.: -, 2007. С. 3. 2007

Лазарев А.А., Скиндерев С.А. Схемы нахождения приближённого решения NP-трудных задач теории расписаний / . М.: МГУ, 2007. С. p.234-237. 2007

Лазарев А.А., Скиндерев С.А. Схемы нахождения приближённого решения для задач теории расписаний / . М.: -, 2007. С. 3. 2007

Our reports XI

Скиндерев С.А., Лазарев А.А. The Schemes Finding of the Approached Decision for the Problems of Scheduling Theory / . Istanbul: -, 2007. С. 3. 2007

Гафаров Е.Р., Лазарев А.А. Algorithms for Single Machine Total Tardiness Problem 1 | Tj / . Karlsruhe: -, 2006. С. -. 2006

Гафаров Е.Р., Лазарев А.А. Graphical Approach for Solving Combinatorial Problems / . Karlsruhe: -, 2006. С. -. 2006

Лазарев А.А., Гафаров Е.Р. Special Case of the Single Machine Total Tardiness Problem Is NP-Hard / . Saint-Étienne, France: -, 2006. С. 3. 2006

Лазарев А.А., Кварацхелия А.Г. Algorithms for Solving Problems 1 | Tj and Even-Odd Partition / . Минск: -, 2005. С. 32-33. 2005

Тезисы докладов

Гафаров Е.Р., Лазарев А.А. Графический метод решения задач комбинаторной оптимизации / Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения» (Москва, 2017). М.: Физический факультет МГУ им М.В.Ломоносова, 2017. С. 162-165. 2017

Лазарев А.А., Зиндер Я.А., Мусатова Е.Г., Тарасов И.А. Алгоритм решения задачи планирования движения поездов на однопутном участке железной дороги / Тезисы докладов научной конференции «Ломоносовские чтения» (Москва, 2017). М.: Физический факультет МГУ им М.В.Ломоносова, 2017. С. 165-168. 2017

Архипов Д.И., Лазарев А.А. Построение оптимального расписания для одного прибора: оценка абсолютной погрешности с помощью метрик / Труды 8-й Московской Международной конференции по исследованию операций (ORM-2016, Москва). М.: ФИЦ ИУ РАН, 2016. С. 11-12. 2016

Архипов Д.И., Лазарев А.А. Построение оптимального расписания для одного прибора: оценка абсолютной погрешности с помощью метрик / Труды 8-й Московской международной конференции по исследованию операций (ORM2016, Москва). М.: ФИЦ ИУ РАН, 2016. Том II. С. 11-12. 2016

Бронников С.В., Герасимов А.Р., Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Петров А.С., Пономарев К.В., Харламов М.М., Хуснуллин Н.Ф., Ядренцев Д.А. Алгоритмы формирования расписания подготовки космонавтов / Труды 8-й Московской Международной конференции по исследованию операций (ORM-2016, Москва). М.: ФИЦ ИУ РАН, 2016. С. 17-18. 2016

Our reports XII

Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Тарасов И.А. Задача построения расписания движения поездов между двумя станциями / Труды 8-й Московской международной конференции по исследованию операций (ORM2016, Москва). М.: ФИЦ ИУ РАН, 2016. Том II. С. 249-250. 2016

Ульянов М.В., Головешкин В.А. Матрица номеров порядка — обобщенное представление для класса индивидуальных задач коммивояжера / Материалы XXII Международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии» (ИСТ-2016, Нижний Новгород). Н. Новгород: Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, 2016. С. 345-346. 2016

Бронников С.В., Лазарев А.А., Морозов Н.Ю., Харламов М.М., Ядренцев Д.А. Mathematical models and approaches in probem of volume planning of ISS cosmonauts trainings / Abstracts of the 28th Conference of the European Chapter on Combinatorial Optimization (Catania, 2015). Catania: Dept. of Economics and Business University of Catania, 2015. С. 61. 2015

Бронников С.В., Лазарев А.А., Петров А.С., Ядренцев Д.А. Models and Approaches for Planning the ISS Cosmonaut Training / Труды VI International Conference on Optimization Methods and Applications. (OPTIMA-2015, Petrovac). М.: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, 2015. С. 196-197 http://www.cima.uevora.pt/optima2015/Optima2015.pdf. 2015

Гафаров Е.Р. Версия программы «1С:Автоматизированное составление расписания» для колледжей / Труды 15-й Международной научно-практической конференции «Новые информационные технологии в образовании» (Москва, 2015). М.: Издательство "1С-Паблишинг 2015. 2. С. 8. 2015

Гафаров Е.Р. Новые функциональные возможности программного продукта "1С: Автоматизированное составлена расписания.Университет"/ Труды 15-й Международной научно-практической конференции «Новые информационные технологии в образовании» (Москва, 2015). М.: ООО "1С-Паблишинг 2015. 2. С. 9-10. 2015

Лазарев А.А., Архипов Д.И. Single machine scheduling: an upper bound on maximum lateness / Abstracts of the 28th Conference of the European Chapter on Combinatorial Optimization (Catania, 2015). Catania: Dept. of Economics and Business University of Catania, 2015. С. 63. 2015

Our reports XIII

Лазарев А.А., Петров А.С., Сологуб А.А., Гущина В.П., Морозов Н.Ю. Модели и алгоритмы решения задач объёмно-календарного планирования подготовки экипажа МКС / Тезисы докладов Всероссийской молодёжной научно-практической конференции «Космодром «Восточный» и перспективы развития российской космонавтики» (Благовещенск, 2015). Благовещенск: СГАУ, 2015. С. 200-201. 2015

Ядренцев Д.А., Бронников С.В., Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Хуснуллин Н.Ф. КАЛЕНДАРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПОДГОТОВКИ КОСМОНАВТОВ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА / Материалы 11-й Международной научно-практической конференции "ПИЛОТИРУЕМЫЕ ПОЛЕТЫ В КОСМОС"(Звездный городок, 2015). Звездный городок: Федеральное государственное бюджетное учреждение «Научно-исследовательский испытательный центр подготовки космонавтов имени Ю.А. Гагарина», 2015. С. 95-96 http://www-01.ibm.com/software/commerce/optimization/cplex-optimizer/index.html. 2015

Дудченко А.М., Лазарев А.А. Подходы решения задачи составления учебного расписания / Тезисы докладов XVI Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения» (о. Ольхон, Байкал, 2014). Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2014. С. 44. http://sei.irk.ru/conferences/mopt2014/disopt.html. 2014

Лазарев А.А., Гущина В.П. ISS team scheduling problem / Abstracts of the 5th International conference "Optimization and Applications"(Optima-2014, Petrovac, Montenegro). М.: ВЦ им. А.А.Дородницына РАН, 2014. С. 123-124. 2014

Лазарев А.А., Сологуб А.А. Planning algorithm for training cosmonauts in ISS / Abstracts of the 5th International conference "Optimization and Applications"(Optima-2014, Petrovac, Montenegro). М.: ВЦ им. А.А.Дородницына РАН, 2014. С. 127-128. 2014

Лазарев А.А., Хуснуллин Н.Ф. Optimal schedule for repair a double-track railroad / Abstracts of the 5th International conference "Optimization and Applications"(Optima-2014, Petrovac, Montenegro). М.: ВЦ им. А.А.Дородницына РАН, 2014. С. 125-126. 2014

Архипов Д.И., Лазарев А.А. Minimization of maximum lateness for railway system with tree-like topology / Abstracts of the EURO-INFORMS 26th European Conference on Operational Research (Rome, 2013). Рим: Sapienza Università di Roma, 2013. С. 156. 2013

Our reports XIV

Карпов И.В., Лазарев А.А., Архипов Д.И. The research of the algorithm which was built for the polynomially solvable case of the NP-hard problem Lmax for single machine / Abstracts of the EURO-INFORMS 26th European Conference on Operational Research (Rome, 2013). Рим: Sapienza Università di Roma, 2013. С. 303. 2013

Карпычев А.А., Лазарев А.А., Ласкова М.В. Train scheduling problem on double-track railroad with single-track lines / Abstracts of the EURO-INFORMS 26th European Conference on Operational Research (Rome, 2013). Рим: Sapienza Università di Roma, 2013. С. 156. 2013

Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Гафаров Е.Р. The problem of train timetable change for the case of repair works / Abstracts of the EURO-INFORMS 26th European Conference on Operational Research (Rome, 2013). Рим: Sapienza Università di Roma, 2013. С. 156. 2013

Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Хуснуллин Н.Ф. The problem of scheduling a freight train as a problem of integer programming / Труды 4-й Международной конференции «Методы оптимизации и программное обеспечение» (ОПТИМА-2013, Petrovac, Montenegro). Petrovac, Montenegro: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, 2013. С. 105. 2013

Ласкова М.В., Лазарев А.А., Мусатова Е.Г. The scheduling problem in the railway network / Abstracts of the EURO-INFORMS 26th European Conference on Operational Research (Rome, 2013). Рим: Sapienza Università di Roma, 2013. С. 370. 2013

Садыков Р.Р., Лазарев А.А., Карпычев А.А. Freight car routing problem / Труды 4-й Международной конференции «Методы оптимизации и программное обеспечение» (ОПТИМА-2013, Petrovac, Montenegro). Petrovac, Montenegro: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, 2013. С. 143-144. 2013

Садыков Р.Р., Лазарев А.А., Ширяев В.?., Стратонников А.?. Freight railcar routing problem in Russia / Abstracts of the EURO-INFORMS 26th European Conference on Operational Research (Rome, 2013). Рим: Sapienza Università di Roma, 2013. С. 165. 2013

Хуснуллин Н.Ф., Лазарев А.А., Мусатова Е.Г. The problem of gathering and scheduling a freight train / Abstracts of the EURO-INFORMS 26th European Conference on Operational Research (Rome, 2013). Рим: Sapienza Università di Roma, 2013. С. 91. 2013

Архипов Д.И. Задача минимизации максимального взвешенного временного смещения для двух станций / Материалы международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2012» (Москва). М.: МГУ, 2012. С. http://lomonosov-msu.ru/uploaded/800/44605$_{6}f22.pdf.2012..,..Theproblemofminimizationmaximumweightedlatenessofordersfortworailwaystatio$
$Vilnius.Vilnius : EURO2012-Vilnius, 2012..151https : //www.euro-online.org/media_{s}ite/reports/EURO25_{A}B.pdf.2012$

Гафаров Е.Р., Долгий А.Б. Two Dedicated Machines Scheduling Problem in Two-Sided Assembly Lines / Book of Abstracts of the International annual conference "Operations Research"(Hannover, 2012). Hannover: Institute of Production Management Leibniz Universitat Hannover, 2012. С. 174. 2012

Лазарев А.А., Мусатова Е.Г. Railway Freight Transportation: Models and Algorithms / Proceedings of the 25th Conference of European Chapter on Combinatorial Optimization (Antalya, 2012). Antalya: Institute of Applied Mathematics of Middle East, 2012. С. 65. 2012

Баранов А.В. Графический алгоритм решения задачи о ранце. Параллельная реализация. / Материалы международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2011» (Москва). М.: МАКС Пресс, 2011. С. 57-58. 2011

Лазарев А.А., Архипов Д.И. Polynomial algorithm for Baptiste's problem for single machine with preemptions of jobs / Abstracts of the 24th European Chapter on Combinatorial Optimization (ECCO, Amsterdam, 2011). Amsterdam: Universiteit Van Amsterdam, 2011. С. 31. 2011

Лазарев А.А., Баранов А.В. Graphical algorithm for Knapsack and Partition problems / Abstracts of the 24th European Chapter on Combinatorial Optimization (ECCO, Amsterdam, 2011). Amsterdam: Universiteit Van Amsterdam, 2011. С. 74. 2011

Лазарев А.А. Полиномиальный алгоритм решения двойственной задачи к NP-трудной задаче теории расписаний $1|r_j|\varphi_{\max}$ / . Новосибирск: Институт Математики СО РАН, 2010. С. С. 144. 2010

Мусатова Е.Г. Один подход к решению двухуровневой квадратично-линейной задачи / Труды 6-й Московской Международной конференции по исследованию операций (ORM 2010, Москва). М.: МАКС Пресс, 2010. С. 246-247.

Open problems

Unknown objective function problem

1 machine

Unknown objective function problem

1 machine

2 jobs

Unknown objective function problem

1 machine

2 jobs

r_j — release times

p_j — processing times

d_j — due dates

...and so on — we assume that all parameters of the jobs are known beforehand.

Unknown objective function problem

1 machine

2 jobs

r_j — release times

p_j — processing times

d_j — due dates

…and so on — we assume that all parameters of the jobs are known beforehand.

k known schedules $\pi_{-k}, \pi_{-k+1}, \ldots, \pi_{-1}$ that are optimal according to an unknown objective function

Unknown objective function problem

The goal is to construct a new schedule π that would be optimal according to the same objective function, or at least would approximate the optimal.

Unknown objective function problem

The goal is to construct a new schedule π that would be optimal according to the same objective function, or at least would approximate the optimal.

Let's suppose that the unknown objective function is simply linear $\sum a_i C_i$.

Unknown objective function problem

The goal is to construct a new schedule π that would be optimal according to the same objective function, or at least would approximate the optimal.

Let's suppose that the unknown objective function is simply linear $\sum a_i C_i$.

If the number of known schedules increases, would the precision of obtained solution increase too?
How many previous schedules is needed in order to construct a new schedule with predefined precision?

Minimizing weighted number of late jobs on a single machine

Minimizing weighted number of late jobs on a single machine

We'd like to express our deep gratitude to our colleague Philippe Baptiste, since contest of this section is heavily based on his paper "Polynomial Time Algorithms for Minimizing the Weighted Number of Late Jobs on a Single Machine with Equal Processing Times" in Journal of Scheduling 2(6), Nov 1999

Minimizing the weighted number of late jobs on a single machine

General structure of single-machine scheduling problems:

1 machine

n jobs, $N = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

p_j — processing time

Minimizing the weighted number of late jobs on a single machine

General structure of single-machine scheduling problems:

1 machine

n jobs, $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

p_j — processing time

The following parameters may or may not be included:

r_j — release time

d_j — due date

D_j — deadline

w_j — weight

Preemptions may be allowed.

Minimizing the weighted number of late jobs on a single machine

To indicate the number of late jobs (but not *how late* they are), the unit penalty function U_j is used:

$$U_j = \begin{cases} 1, & C_j > d_j \\ 0, & C_j \leq d_j \end{cases}$$

Total number of late jobs: $\sum\limits_j U_j$, weighted number of late jobs: $\sum\limits_j w_j U_j$

Minimizing the weighted number of late jobs on a single machine

$1||\sum U_j$

Solvable in polynomial time: $O(n \log n)$ (Michael J. Moore, 1968)

$1|pmtn,\ r_j|\sum U_j$

Solvable in polynomial time: $O(n^3)$ (Eugene L. Lawler, 1990)

$1|p_j = p,\ r_j|\sum U_j$

Solvable in polynomial time: $O(n^3 \log n)$ (Jacques Carlier, 1968).

Minimizing the weighted number of late jobs on a single machine

$1|p_j = p,\ r_j|\sum w_j U_j, \quad 1|pmtn,\ p_j = p,\ r_j|\sum w_j U_j$

Solvable in polynomial time: $1|p_j = p\ r_j|\sum w_j U_j$: $O(n^7)$
$1|pmtn,\ p_j = p,\ r_j|\sum w_j U_j$: $O(n^{10})$ (Philippe Baptiste, 1998)

$1|r_j|\sum U_j$

NP-hard in the strong sense, but some branch and bound methods exist

$1|pmtn,\ r_j|\sum U_j$, $1|pmtn,\ r_j|\sum w_j U_j$

$1|pmtn,\ r_j|\sum U_j$ is polynomially solvable: space: $O(n^3 k^2)$, time: $O(nk^2)$, k is the number of different release times r_j $1|pmtn,\ r_j|\sum w_j U_j$ is *NP*-hard, but a pseudo-polynomial algorithm was developed: space: $O(nk^2 W^2)$, time: $O(k^2 W)$, $W = \sum_j w_j$ (Eugene L. Lawler, 1990)

Minimizing the weighted number of late jobs on a single machine

$1|r_j|\sum w_j U_j$

NP-hard in the strong sense. Although the preemptive variant is solvable exactly by Lawler's pseudo-polynomial algorithm, no exact approach has been made to solve this problem.

Scheduling Theory and Applications. Part IV

Alexander Lazarev

Lomonosov Moscow State University

National Research University Higher School of Economics

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (ICS RAS)

jobmath@mail.ru

www.orsot.ru

Thank you for your attention!