В данном файле 5 вариантов обязательных контрольных.
Номер варианта следует выбирать согласно номеру в списке группы:

- **1 вариант — 1-й, 6-й и 11-й номера,**
- **2 вариант — 2-й, 7-й и 12-й номера,**
- **3 вариант — 3-й, 8-й и 13-й номера,**
- **4 вариант — 4-й, 9-й номера,**
- **5 вариант — 5-й, 10-й номера.**

Задачи со «звёздочкой» — общие для всех.
Их правильное выполнение даёт дополнительные баллы.

1. ($*$) *Как соединить 50 городов наименьшим числом авиалиний так, чтобы из каждого города можно было попасть в любой, сделав не более двух пересадок?*

2. ($*$) *На консультации было 20 школьников и разбиралось 20 задач. Оказалось, что каждый из школьников решил две задачи и каждую задачу решили два школьника. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну из решённых им задач и все задачи были разобраны.*

3. ($*$)

4. ($*$) *В классе больше 32, но меньше 40 человек. Каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка – с пятью мальчиками. Сколько человек в классе?*

Контрольная работа по курсу: «Дискретный анализ».
Теория графов.
3 курс, МГУ, физический факультет,
кафедра физико-математических методов управления.
19 апреля 2016 г.; срок сдачи: 26 апреля 2016 г.
Вариант 1

1. Между девятью планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий, Плутон – Венера, Земля – Плутон, Плутон – Меркурий, Меркурий – Венера, Уран – Нептун, Нептун – Сатурн, Сатурн – Юпитер, Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

2. В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

3. В стране 2000 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что через любой город проходит не более N различных несамопересекающихся циклических маршрутов нечётной длины. Докажите, что страну можно разделить на $2N + 2$ республики так, чтобы никакие два города из одной республики не были соединены дорогой.

4. Найти кратчайший путь от вершины v_0 до вершины v_{13} в графе G_1, в котором длины ребер равны соответствующим элементам a_{ij} матрицы A. Граф G_1 задан списком ребер: $(\{v_0, v_1\}, a_{11})$, $(\{v_0, v_4\}, a_{12})$, $(\{v_0, v_2\}, a_{13})$, $(\{v_1, v_3\}, a_{14})$, $(\{v_1, v_6\}, a_{15})$, $(\{v_1, v_4\}, a_{16})$, $(\{v_2, v_4\}, a_{21})$, $(\{v_2, v_7\}, a_{22})$, $(\{v_2, v_5\}, a_{23})$, $(\{v_3, v_8\}, a_{24})$, $(\{v_3, v_6\}, a_{25})$, $(\{v_4, v_6\}, a_{26})$, $(\{v_4, v_9\}, a_{31})$, $(\{v_6, v_7\}, a_{32})$, $(\{v_4, v_7\}, a_{33})$, $(\{v_5, v_7\}, a_{34})$, $(\{v_5, v_{10}\}, a_{35})$, $(\{v_6, v_8\}, a_{36})$, $(\{v_6, v_{11}\}, a_{41})$, $(\{v_6, v_9\}, a_{42})$, $(\{v_7, v_9\}, a_{43})$, $(\{v_7, v_{12}\}, a_{44})$, $(\{v_7, v_{10}\}, a_{45})$, $(\{v_8, v_{11}\}, a_{46})$, $(\{v_9, v_{11}\}, a_{51})$, $(\{v_9, v_{13}\}, a_{52})$, $(\{v_9, v_{12}\}, a_{53})$, $(\{v_{10}, v_{12}\}, a_{54})$, $(\{v_{11}, v_{13}\}, a_{55})$, $(\{v_{12}, v_{13}\}, a_{56})$,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 6 & 3 & 1 & 4 \\ 7 & 6 & 9 & 4 & 3 & 4 \\ 8 & 3 & 2 & 6 & 2 & 7 \\ 6 & 13 & 9 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

При оформлении работы:

- на работе должна быть фамилия автора и номер варианта!
- работа оформляется в редакторе TEX и распечатывается файл *dvi* или *pdf*,
- распечатанная работа возвращается с данным листом (в опрятном виде!) варианта контрольных заданий. Лист с заданиями не сгибать, не комкать.

Контрольная работа по курсу: «Дискретный анализ».
Теория графов.
3 курс, МГУ, физический факультет,
кафедра физико-математических методов управления.
19 апреля 2016 г.; срок сдачи: 26 апреля 2016 г.
Вариант 2

1. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

2. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

3. В стране 100 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Для каждых четырёх городов существуют хотя бы две дороги между ними. Известно, что не существует маршрута, проходящего по каждому городу ровно один раз. Докажите, что можно выбрать два города таким образом, чтобы каждый из оставшихся городов был соединен дорогой хотя бы с одним из двух выбранных городов.

4. Найти кратчайший путь от вершины v_0 до вершины v_{13} в графе G_1, в котором длины ребер равны соответствующим элементам a_{ij} матрицы A. Граф G_1 задан списком ребер: $(\{v_0, v_1\}, a_{11})$, $(\{v_0, v_4\}, a_{12})$, $(\{v_0, v_2\}, a_{13})$, $(\{v_1, v_3\}, a_{14})$, $(\{v_1, v_6\}, a_{15})$, $(\{v_1, v_4\}, a_{16})$, $(\{v_2, v_4\}, a_{21})$, $(\{v_2, v_7\}, a_{22})$, $(\{v_2, v_5\}, a_{23})$, $(\{v_3, v_8\}, a_{24})$, $(\{v_3, v_6\}, a_{25})$, $(\{v_4, v_6\}, a_{26})$, $(\{v_4, v_9\}, a_{31})$, $(\{v_6, v_7\}, a_{32})$, $(\{v_4, v_7\}, a_{33})$, $(\{v_5, v_7\}, a_{34})$, $(\{v_5, v_{10}\}, a_{35})$, $(\{v_6, v_8\}, a_{36})$, $(\{v_6, v_{11}\}, a_{41})$, $(\{v_6, v_9\}, a_{42})$, $(\{v_7, v_9\}, a_{43})$, $(\{v_7, v_{12}\}, a_{44})$, $(\{v_7, v_{10}\}, a_{45})$, $(\{v_8, v_{11}\}, a_{46})$, $(\{v_9, v_{11}\}, a_{51})$, $(\{v_9, v_{13}\}, a_{52})$, $(\{v_9, v_{12}\}, a_{53})$, $(\{v_{10}, v_{12}\}, a_{54})$, $(\{v_{11}, v_{13}\}, a_{55})$, $(\{v_{12}, v_{13}\}, a_{56})$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 11 & 3 & 6 & 4 & 5 & 4 \\ 6 & 9 & 6 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

При оформлении работы:

- на работе должна быть фамилия автора и номер варианта!
- работа оформляется в редакторе $\TeX$ и распечатывается файл *dvi* или *pdf*,
- распечатанная работа возвращается с данным листом (в опрятном виде!) варианта контрольных заданий. Лист с заданиями не сгибать, не комкать.

Контрольная работа по курсу: «Дискретный анализ».
Теория графов.
3 курс, МГУ, физический факультет,
кафедра физико-математических методов управления.
19 апреля 2016 г.; срок сдачи: 26 апреля 2016 г.
Вариант 3

1. В стране Семёрка 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из каждого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

2. Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

3. Оля и Максим оплатили путешествие по архипелагу из 2009 островов, где некоторые острова связаны двусторонними маршрутами катера. Они путешествуют, играя. Сначала Оля выбирает остров, на который они прилетают. Затем они путешествуют вместе на катерах, по очереди выбирая остров, на котором еще не были (первый раз выбирает Максим). Кто не сможет выбрать остров, проиграл. Докажите, что Оля может выиграть.

4. Найти кратчайший путь от вершины v_0 до вершины v_{13} в графе G_1, в котором длины ребер равны соответствующим элементам a_{ij} матрицы A. Граф G_1 задан списком ребер: $(\{v_0, v_1\}, a_{11})$, $(\{v_0, v_4\}, a_{12})$, $(\{v_0, v_2\}, a_{13})$, $(\{v_1, v_3\}, a_{14})$, $(\{v_1, v_6\}, a_{15})$, $(\{v_1, v_4\}, a_{16})$, $(\{v_2, v_4\}, a_{21})$, $(\{v_2, v_7\}, a_{22})$, $(\{v_2, v_5\}, a_{23})$, $(\{v_3, v_8\}, a_{24})$, $(\{v_3, v_6\}, a_{25})$, $(\{v_4, v_6\}, a_{26})$, $(\{v_4, v_9\}, a_{31})$, $(\{v_6, v_7\}, a_{32})$, $(\{v_4, v_7\}, a_{33})$, $(\{v_5, v_7\}, a_{34})$, $(\{v_5, v_{10}\}, a_{35})$, $(\{v_6, v_8\}, a_{36})$, $(\{v_6, v_{11}\}, a_{41})$, $(\{v_6, v_9\}, a_{42})$, $(\{v_7, v_9\}, a_{43})$, $(\{v_7, v_{12}\}, a_{44})$, $(\{v_7, v_{10}\}, a_{45})$, $(\{v_8, v_{11}\}, a_{46})$, $(\{v_9, v_{11}\}, a_{51})$, $(\{v_9, v_{13}\}, a_{52})$, $(\{v_9, v_{12}\}, a_{53})$, $(\{v_{10}, v_{12}\}, a_{54})$, $(\{v_{11}, v_{13}\}, a_{55})$, $(\{v_{12}, v_{13}\}, a_{56})$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 9 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 15 & 3 & 2 & 2 & 6 & 6 \\ 10 & 13 & 14 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 8 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

При оформлении работы:

- на работе должна быть фамилия автора и номер варианта!
- работа оформляется в редакторе TEX и распечатывается файл *dvi* или *pdf*,
- распечатанная работа возвращается с данным листом (в опрятном виде!) варианта контрольных заданий. Лист с заданиями не сгибать, не комкать.

Контрольная работа по курсу: «Дискретный анализ».
Теория графов.
3 курс, МГУ, физический факультет,
кафедра физико-математических методов управления.
19 апреля 2016 г.; срок сдачи: 26 апреля 2016 г.
Вариант 4

1. В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта – ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний – одна, а из всех остальных городов – по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).

2. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

3. В королевстве N городов, некоторые пары которых соединены непересекающимися дорогами с двусторонним движением (города из такой пары называются соседними). При этом известно, что из каждого города можно доехать до любого другого, но невозможно, выехав из некоторого города и двигаясь по различным дорогам, вернуться в исходный город. Однажды Король провел такую реформу: каждый из N мэров городов стал снова мэром одного из N городов, но, возможно, не того города, в котором он работал до реформы. Оказалось, что каждые два мэра, работавшие в соседних городах до реформы, оказались в соседних городах и после реформы. Докажите, что либо найдётся город, в котором мэр после реформы не поменялся, либо найдётся пара соседних городов, обменявшихся мэрами.

4. Найти кратчайший путь от вершины v_0 до вершины v_{13} в графе G_1, в котором длины ребер равны соответствующим элементам a_{ij} матрицы A. Граф G_1 задан списком ребер: $(\{v_0,v_1\},a_{11})$, $(\{v_0,v_4\},a_{12})$, $(\{v_0,v_2\},a_{13})$, $(\{v_1,v_3\},a_{14})$, $(\{v_1,v_6\},a_{15})$, $(\{v_1,v_4\},a_{16})$, $(\{v_2,v_4\},a_{21})$, $(\{v_2,v_7\},a_{22})$, $(\{v_2,v_5\},a_{23})$, $(\{v_3,v_8\},a_{24})$, $(\{v_3,v_6\},a_{25})$, $(\{v_4,v_6\},a_{26})$, $(\{v_4,v_9\},a_{31})$, $(\{v_6,v_7\},a_{32})$, $(\{v_4,v_7\},a_{33})$, $(\{v_5,v_7\},a_{34})$, $(\{v_5,v_{10}\},a_{35})$, $(\{v_6,v_8\},a_{36})$, $(\{v_6,v_{11}\},a_{41})$, $(\{v_6,v_9\},a_{42})$, $(\{v_7,v_9\},a_{43})$, $(\{v_7,v_{12}\},a_{44})$, $(\{v_7,v_{10}\},a_{45})$, $(\{v_8,v_{11}\},a_{46})$, $(\{v_9,v_{11}\},a_{51})$, $(\{v_9,v_{13}\},a_{52})$, $(\{v_9,v_{12}\},a_{53})$, $(\{v_{10},v_{12}\},a_{54})$, $(\{v_{11},v_{13}\},a_{55})$, $(\{v_{12},v_{13}\},a_{56})$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 7 & 2 & 2 & 5 \\ 8 & 2 & 7 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 3 & 7 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 5 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

При оформлении работы:

- на работе должна быть фамилия автора и номер варианта!
- работа оформляется в редакторе TEX и распечатывается файл *dvi* или *pdf*,
- распечатанная работа возвращается с данным листом (в опрятном виде!) варианта контрольных заданий. Лист с заданиями не сгибать, не комкать.

Контрольная работа по курсу: «Дискретный анализ».
Теория графов.
3 курс, МГУ, физический факультет,
кафедра физико-математических методов управления.
19 апреля 2016 г.; срок сдачи: 26 апреля 2016 г.
Вариант 5

1. Имеются две страны: Обычная и Зазеркалье. У каждого города в Обычной стране есть "двойник"в Зазеркалье, и наоборот. Однако если в Обычной стране какие-то два города соединены железной дорогой, то в Зазеркалье эти города не соединены, а каждые два несоединённых в Обычной стране города обязательно соединены железной дорогой в Зазеркалье. В Обычной стране девочка Алиса не может проехать из города A в город B, сделав менее двух пересадок. Доказать, что Алиса в Зазеркалье сможет проехать из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок.

2. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?

3. С четырёх сторон шахматной доски размером $n \times n$ построена кайма шириной в два поля. Докажите, что кайму можно обойти шахматным конём, побывав на каждом поле один и только один раз, в тех и только тех случаях, когда $n-1$ кратно 4.

4. Найти кратчайший путь от вершины v_0 до вершины v_{13} в графе G_1, в котором длины ребер равны соответствующим элементам a_{ij} матрицы A. Граф G_1 задан списком ребер: $(\{v_0, v_1\}, a_{11})$, $(\{v_0, v_4\}, a_{12})$, $(\{v_0, v_2\}, a_{13})$, $(\{v_1, v_3\}, a_{14})$, $(\{v_1, v_6\}, a_{15})$, $(\{v_1, v_4\}, a_{16})$, $(\{v_2, v_4\}, a_{21})$, $(\{v_2, v_7\}, a_{22})$, $(\{v_2, v_5\}, a_{23})$, $(\{v_3, v_8\}, a_{24})$, $(\{v_3, v_6\}, a_{25})$, $(\{v_4, v_6\}, a_{26})$, $(\{v_4, v_9\}, a_{31})$, $(\{v_6, v_7\}, a_{32})$, $(\{v_4, v_7\}, a_{33})$, $(\{v_5, v_7\}, a_{34})$, $(\{v_5, v_{10}\}, a_{35})$, $(\{v_6, v_8\}, a_{36})$, $(\{v_6, v_{11}\}, a_{41})$, $(\{v_6, v_9\}, a_{42})$, $(\{v_7, v_9\}, a_{43})$, $(\{v_7, v_{12}\}, a_{44})$, $(\{v_7, v_{10}\}, a_{45})$, $(\{v_8, v_{11}\}, a_{46})$, $(\{v_9, v_{11}\}, a_{51})$, $(\{v_9, v_{13}\}, a_{52})$, $(\{v_9, v_{12}\}, a_{53})$, $(\{v_{10}, v_{12}\}, a_{54})$, $(\{v_{11}, v_{13}\}, a_{55})$, $(\{v_{12}, v_{13}\}, a_{56})$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ 9 & 2 & 3 & 5 & 7 & 3 \\ 10 & 7 & 5 & 7 & 4 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

При оформлении работы:

- на работе должна быть фамилия автора и номер варианта!
- работа оформляется в редакторе TeX и распечатывается файл *dvi* или *pdf*,
- распечатанная работа возвращается с данным листом (в опрятном виде!) варианта контрольных заданий. Лист с заданиями не сгибать, не комкать.